Ma.
0.
54ª
5

Die Lehre

von den

Eigenſchaften der Linien

und der

ebenen Flächen.

Für den Selbſtunterricht bearbeitet,

von

Friedrich Wilhelm Streit,

Königl. Preußiſchem Hauptmann der ſechſten Artillerie-Brigade.

Mit 6 Kupfertafeln.

Weimar,

im Verlage des Gr. H. S. priv. Landes-Induſtrie-Comptoirs.

1819.

Lehrbuch
der
reinen Mathematik
für
den Selbſtunterricht bearbeitet,
von
Friedrich Wilhelm Streit,
Königl. Preußiſchem Hauptmann der ſechſten Artillerie=Brigade.

Fünfter Theil.

Geometrie

und zwar

1) Von den Eigenſchaften der Linien.
2) Von den Eigenſchaften der ebenen Flächen.

Mit 6 Kupfertafeln.

Weimar,
im Verlage des Gr. H. S. priv. Landes=Induſtrie=Comptoirs.
1819.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK BAMBERG

Vorrede.

Eigentlich habe ich wohl ſchon dem vierten Bande als Schluß=Anmerkung zugefügt, was ich etwa hier als Vorrede ſagen könnte, doch glaube ich noch Nachſtehendes bemerken zu müſſen.

Wenn einige der Leſer, welche dieſes Werk zu ihrem Selbſt=Unterrichte benutzen, auf §. §. wie der 142ſte kommen, und den vierten Band der Arithmetik nicht ſtudirt haben, ſo können dieſe §. §. und Sätze ganz überſchlagen werden, indem ſolche ohne den vierten Band durchaus nicht verſtanden werden können. Es iſt aber auch nicht unumgänglich nöthig, dieſe §. §. zu verſtehen, wenn man nicht tiefer in die Wiſſenſchaft der Mathematik eindringen will, als blos die Sätze der Geometrie und ihre Beweiſe in Anwendung zu bringen, und man wird alle am Schluſſe dieſes Bandes angeführten Aufgaben auch ohne Kenntniß der Lehre von den Functionen, unendlichen Reihen ꝛc., löſen können.

Jedoch verſichere ich den Anfänger, daß in dem vierten Bande durchaus nichts Schwieriges enthalten iſt,

und alle dieſe Gegenſtände nur ſchwieriger ausſehen, als ſie ſind. Wer ſich übrigens in dieſe Rechnungen einſtudirt hat, wird viel Vergnügen daran finden, und bald bemerken, daß aus ſolchen eine Menge Erleichterungen und brauchbare Formeln entſpringen. Wer endlich in der Folge weiter in der Mathematik kommen will, kann den vierten Band nicht entbehren; und dem rathe ich, ſich ja die Mühe, ihn zu ſtudiren, nicht verdrießen zu laſſen.

Ich habe dieſem Bande alle Druckfehler der vier übrigen Bände und ſeine eigenen zugefügt, und erſuche die Leſer, ſolche vor dem Gebrauche zu berichtigen. Es iſt ſchwierig, ein mathematiſches Werk ohne Druckfehler zu erhalten; noch ſchwieriger aber, wenn der Autor in ſo großer Entfernung vom Druckorte lebt, ein Anderer die Reviſion beſorgt, und nicht jeder Bo-

gen dem Autor zu dieſem Zwecke zugeſandt werden kann.

Zum Schluſſe bemerke ich, daß der ſechſte Band unfehlbar zur Michaelis-Meſſe erſcheinen wird.

Breslau, den 3ten Juni 1819.

Der Verfaſſer.

Lehrbuch

der

reinen Mathematik.

Fünfter Theil.

Verzeichniß
derer in dieſem Bande, außer den ſchon gebrauch-
ten, vorkommenden Zeichen und Abkürzungen.

$\angle$ Winkel.
$\angle\angle$ = = in der Mehrzahl.
$\triangle$ Dreieck.
$\triangle\triangle$ = = in der Mehrzahl.
$\frown$ Bogen.
$\frown\frown$ = in der Mehrzahl.
! Senkrecht.
Parallel, auch Parallelen.
$\sim$ Ähnlich.
v. d. C. vermöge der Conſtruktion.
w. z. e. w. welches zu erweiſen war.
Sch. $\angle$ Scheitel-Winkel.
Wchſ. $\angle$ Wechſel-Winkel.
. u. ä. $\angle$ Innere und äußere Winkel auf einerlei Seite.
Parallg. Parallelogramm.
#gr. desgleichen.

Geometrie.

Einleitung.

§. 1.

Stätige Größen ſind diejenigen, welche aus lauter untrennbaren Theilen beſtehen. Z. B. die Quadratruthen, welche ein Stück Feld enthält.

Geometrie iſt eine Wiſſenſchaft, welche ſich mit Vergleichung und Ausmeſſung ſtätiger Größen beſchäftigt, deren es drei verſchiedene Gattungen giebt; nämlich Linien, Flächen und Körper.

Eine Linie iſt eine Ausdehnung in die Länge, ohne alle Breite und Dicke.

Eine Fläche iſt eine Ausdehnung in die Länge und Breite, ohne Tiefe oder Dicke.

Ein Körper iſt eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Tiefe oder Dicke.

§. 2.

Ein Punkt hat weder Ausdehnung noch Theile, und kann daher im ſtrengſten Sinne nur gedacht, aber nicht gezeichnet werden: denn es iſt leicht einzuſehen, daß, wenn ein Punkt auch noch ſo fein gemacht worden iſt, man durch ein Vergrößerungsglas dennoch Theile wahrnehmen wird.

Durch die Fortbewegung eines Punktes, wenn man

ſich denkt, daß er eine Spur hinterläßt, entſteht eine Linie, deren Gränzen ſodann zwei Punkte ſind.

Es kann aber eigentlich auch eine Linie im ſtrengen Sinne nur gedacht werden, da ſolche keine Breite haben ſoll.

Fig. 1.

Bewegt ſich eine Linie anders als nach ihrer Lage, ſo bildet ihre hinterlaſſene Spur eine Fläche. Wenn ſich nämlich an Fig. 1. die Linie AB anders, als nach der Lage AB bewegt, z. B. mit ihrer ganzen Länge gegen CD oder EF, ſo würde ihre hinterlaſſene Spur die Flächen ABCD oder ABEF bilden.

Die Gränzen einer Fläche ſind Linien.

Fig. 2.

Bewegt ſich endlich eine Fläche anders als nach ihrer Lage, ſo bildet ihre hinterlaſſene Spur einen Körper, deſſen Begränzungen Flächen ſind.

Bewegte ſich z. B. an Fig. 2. die Fläche ABCD in gerader Richtung aufwärts, ſo würde die hinterlaſſene Spur den Körper ABCDEFGH bilden.

§. 3.

Eine gerade Linie iſt der kürzeſte Weg von einem Punkte zum andern, oder eine ſolche, deren Theile nie ihre Richtung verändern.

Eine krumme Linie iſt eine ſolche, deren Theile jeden Augenblick ihre Richtung verändern, oder welche gar keine geraden Theile hat.

Eine gemiſchte Linie iſt eine ſolche, welche aus geraden und krummen Theilen zuſammen geſetzt iſt.

Eine gerade Linie werden wir in der Folge öfters blos eine Gerade, eine krumme Linie aber eine Krumme, der Kürze halber, benennen.

Fig. 3.

Die Richtung oder Lage einer Geraden wird, wie

aus obiger Erklärung hervor geht, durch zwei Punkte A und B beſtimmt; Fig. 3., und man kann durch dieſe zwei Punkte nur eine einzige Gerade, wohl aber eine unendliche Menge Krummer ziehen, wie die Figur zeigt. Alle übrige Gerade aber, würden immer wieder über die erſte AB fallen, und ſie decken.

Man wird nun auch leicht einſehen, daß zwei Gerade, wenn ſie einander durchſchneiden, nur einen Punkt, aber keinen Theil mit einander gemein haben: denn hätten ſie einen gemeinſchaftlichen Theil, ſo würden, da alle Theile einer Geraden dieſelbe Richtung haben, auch die Linien über einander fallen und ſich nicht ſchneiden, ſondern einander decken.

§. 4.

Eine Ebene (*Planum*) iſt eine ſolche Fläche, auf welche man eine Gerade dergeſtalt ziehen kann, daß jeder Punkt derſelben auf der Fläche aufliegt.

In dieſem Bändchen werden ſich alle Betrachtungen durchaus immer auf eine und dieſelbe Ebene beziehen, und deßhalb nur von Ausdehnung der erſten und zweiten Art die Rede ſeyn.

§. 5. Fig. 4.

Eine Kreis-Linie, Umkreis (*Peripherie*), iſt eine in ſich ſelbſt zurückkehrende krumme Linie, welche immer gleich weit von ihrem Mittelpunkte entfernt bleibt. Sie entſteht, wenn eine Gerade AC, CB, CF ꝛc. ſich um einen unbeweglichen Punkt (Mittelpunkt, *Centrum*) herum bewegt, bis ſie wieder in ihre vorige Lage kömmt.

Kreisfläche, Zirkelfläche, iſt der von der Kreis-Linie eingeſchloſſene Raum.

Kreisbogen (Arcus), wird jeder Theil der Kreis-Linie, als AD, DE, EB ꝛc., genannt.

Ein Bogen iſt nach außen zu erhaben (convex), als DHE, hingegen nach innen zu hohl (concav), als

DIE; es werden jedoch dieſe Ausdrücke mehr von Flächen als Linien gebraucht.

Halbmeſſer oder *Radius* iſt jede Gerade, welche im Mittelpunkte des Kreiſes anfängt, und im Umkreiſe endigt.

Durchmeſſer oder *Diameter* iſt eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht, und zu beiden Seiten im Umkreiſe endigt. Es iſt hieraus leicht erſichtlich, daß ein Durchmeſſer nichts anders iſt, als die Summe zweier Halbmeſſer: nehmlich $AB = AC + CB$; und eben ſo ein Halbmeſſer die Hälfte des Durchmeſſers: nämlich $AC = \frac{1}{2} AB$.

Sehne (*Chorda*), iſt jede Gerade, welche durch die Kreisfläche geht, und zu beiden Seiten im Umkreiſe endigt, als DE, AB ꝛc.

Der Durchmeſſer iſt deßhalb auch eine Sehne, und zwar die längſte, welche in einem Kreiſe gezogen werden kann.

Kreis-Ausſchnitt (*Sector*), iſt ein Theil der Zirkelfläche, welcher von zwei Halbmeſſern und einem Bogen begränzt wird. ACFA, FCBF ꝛc.

Kreis-Abſchnitt (*Segmentum*), iſt ein Theil der Zirkelfläche, welcher von einer Sehne und einem Bogen begränzt wird. ABFA, DHED ꝛc.

§. 6.

Aus den vorhergehenden Erklärungen folgt nun

1) Alle Halbmeſſer eines Kreiſes ſind einander gleich: denn ſie ſind die Entfernungen des Umkreiſes vom Mittelpunkte.

2) Alle Durchmeſſer eines Kreiſes ſind einander gleich: denn ſie ſind nichts anders, als die Summen zweier Halbmeſſer.

3) Gleiche Sehnen ſpannen gleiche Bogen, und umgekehrt.

Fig. 5.

Es ſey z. B. Sehne CD = Sehne EF, ſo iſt auch der Bogen CMD = Bogen ENF.

Denn man denke ſich den Abſchnitt ENF, ſo auf CMD, gelegt, daß EF genau auf CD zu liegen komme, ſo werden auch die ⌒ (Bogen) ENF und CMD einander decken: weil die Sehne EF kein größeres und kein kleineres Stück von der Zirkelfläche abſchneiden kann, als die Sehne CD. Sollte EF ein größeres Stück als CD abſchneiden, z. B. PMQ, ſo müßte EF auch näher nach dem Mittelpunkte zu liegen, und größer als CD ſeyn.

Ein einleuchtenderer Beweis kann erſt weiter hinten gegeben werden.

Es folgt hieraus, daß eine größere Sehne zu einem größern ⌒, und eine kleinere Sehne zu einem kleinern ⌒ gehört, und umgekehrt; aber *keinesweges*, daß zu einem doppelten ⌒ eine doppelte Sehne ꝛc. gehört.

4) Der Durchmeſſer theilt die Zirkelfläche in zwei gleiche Theile.

Die Wahrheit hiervon kann ebenfalls durch Auflegen des Halbkreiſes ANB, auf AMB, dargethan und verſinnlicht werden; ein einleuchtenderer Beweis aber ebenfalls erſt ſpäter vorkommen.

§. 7.

Zu denen in der Einleitung des erſten Bandes dieſes Lehrbuches angeführten Grundſätzen müſſen zum Behufe der Geometrie noch hinzugefügt werden

1) dieſe Grundwahrheit:

Größen, welche einander decken, ſind vollkommen gleich, und vollkommen gleiche Größen decken einander.

Es verſteht ſich, daß hier nur von Ausdehnungen der

erſten und zweiten Art, d. i. von Linien und Flächen, die Rede iſt.

2) Nachſtehende Forderungs-Sätze:

a) durch zwei gegebene Punkte kann eine gerade Linie gezogen, und beiderſeits nach Gefallen verlängert werden.

b) Aus jedem beliebigen Punkte kann mit ebenfalls beliebigem Halbmeſſer ein Kreis gezogen werden.

Aus dieſen und den oben erwähnten Sätzen werden die meiſten und wichtigſten Wahrheiten der Mathematik hergeleitet.

§. 8.

Wie auf dem Papiere eine gerade Linie gezogen wird, iſt wohl ziemlich Jedem bekannt, daß ſolches nämlich mit dem Lineal und der Blei- oder Reisfeder geſchieht; es iſt jedoch für den Anfänger hinzuzufügen, daß wohl wenig oder keine (beſonders mit Blei gezogene) Linien im mathematiſchen Sinne gerade ſind. Man denke ſich nur, daß der leiſeſte Druck der Hand eine Abweichung verurſachen kann, die, obſchon dem bloßen Auge nicht ſichtbar, doch nach dem ſtrengen Sinne der Erklärung einer Geraden nicht ſeyn darf.

Auf dem Felde wird eine Gerade durch mehrere hinter einander gepflanzte Stangen oder Pflöcke bezeichnet (abgeſteckt), und, wenn es nöthig iſt, längs derſelben eine Schnur gezogen, und an dieſer eine ſeichte Vertiefung eingegraben (traçirt).

Daß ein Kreis auf dem Papiere, mittelſt des Inſtrumentes, welches man Zirkel nennt, gezogen wird, iſt ebenfalls bekannt. Auf dem Felde wird ein Pflock im Centrum des Kreiſes in die Erde geſchlagen, und eine Schnur, ſo lang der Radius ſeyn ſoll, daran befeſtiget, und mit einem am Ende des Radius angebundenen Pflocke ein Kreis auf der Erde gezogen.

§. 9.

Ein jeder Umkreis, er ſey groß oder klein, wird in 360 Theile, welche man Grade nennt, eingetheilt, jeder Grad in 60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden ꝛc. und folgender Geſtalt bezeichnet:

$30^\circ\ 15'\ 12''\ 45'''$ ꝛc. heißt

30 Grade, 15 Minuten, 12 Secunden und 45 Terzien.

Dieſe Eintheilung iſt jedoch nur willkührlich, und man hat die Zahl 360 deßhalb gewählt, weil ſie aus vielen Faktoren zuſammen geſetzt iſt. Es haben zwar die Franzoſen, die beſonders zu den Zeiten der Revolution alles verbeſſern und verändern wollten, ſogar die alte Eintheilung des Kreiſes nicht unangetaſtet gelaſſen, ſondern ſolchen in 400 Centeſimal-Grade, den Grad in 100 Centeſimal-Minuten u. ſ. w. eingetheilt. Sie haben aber nicht allein keine Nachahmer gefunden, ſondern auch die meiſten franzöſiſchen Schriftſteller ſelbſt ſind bei der alten Eintheilung geblieben.

Man muß ſich nicht vorſtellen, daß durch eine gewiſſe Anzahl Grade, Minuten ꝛc. ein wahres Längenmaß ausgeſprochen wird; ſondern es wird dadurch blos angedeutet, wie ſich der dadurch bezeichnete Bogen zum ganzen Umkreiſe verhält.

Fig. 6.

Wenn z. B. der $\frown AB = 60^\circ$, ſo heißt dieſes, der $\frown AB$ verhält ſich zum ganzen Umkreiſe, wie $60 : 360 = 1 : 6$; er iſt alſo der ſechſte Theil des Umkreiſes.

§. 10. Fig. 6.

Ein Winkel (angulus) iſt das Zuſammentreffen zweier Linien in einem Punkte, welcher der Scheitel (vertex) genannt wird. Die beiden Linien, welche den Winkel bilden, heißen ſeine Schenkel (crura).

Die vorerwähnte Eintheilung des Kreiſes wird auch

vorzüglich gebraucht, um die Maaße der Winkel auszudrücken; d. h. zu beſtimmen, wie viel von einem aus dem Scheitel des Winkels gezogenen Umkreiſe an Graden ꝛc. zwiſchen die Schenkel deſſelben fallen.

Wir wollen uns in der Folge der Abkürzung ∟ für einen, und ∟∟ für mehrere Winkel, bedienen.

Man benennt die ∟∟ entweder mit einem eingezeichneten, oder mit drei herumgeſchriebenen Buchſtaben, wo der am Scheitel ſtehende in die Mitte kömmt. An Fig. 6. iſt ∟ x = ∟ ACA und
∟ y = ∟ BCE.

Die Bezeichnung durch einen Buchſtaben iſt jedoch vorzuziehen, da ſolche zu weniger Irrungen Anlaß giebt.

Es iſt ſchon an Fig. 6. erſichtlich, daß ein ∟ durch Verlängerung ſeiner Schenkel nicht wächſt, d. h. mehr Grade erhält, und eben ſo wenig durch Verkürzung der Schenkel abnimmt oder weniger Grade erhält: ſondern ein ∟ wächſt, wenn ſeine Schenkel ſich mehr öffnen, und nimmt ab, wenn ſie ſich mehr ſchließen.

§. 11. Fig. 7.

Um einen ∟ y, der einem gegebenen ∟ x gleich ſeyn ſoll, an irgend einem Punkte einer gegebenen Geraden zu verzeichnen, verfahre man folgendermaßen:

Aus dem Scheitel C des gegebenen ∟ ziehe man mit willkührlichem Halbmeſſer den ⌒ ED, und mit demſelben Halbmeſſer aus dem gegebenen Punkte c, an welchen der ∟ zu zeichnen iſt, den ⌒ def von beliebiger Größe; ferner meſſe man die Sehne ED, und ſchneide ed = ED ab, ziehe durch e und c die Gerade aec, ſo wird der ∟ y = ∟ x ſeyn.

Denn es iſt Sehne de = DE
also auch ⌒ de = ⌒ DE.

Da nun durch die ⌒⌒ die ∟∟ beſtimmt werden, ſo iſt auch ∟ y = ∟ x.

Anmerkung. Gewöhnlich mißt man die ∠∠ auf dem Papiere mit einem unter dem Nahmen Tranſporteur bekannten Inſtrumente. Es beſteht dieſes meiſtentheils aus einem Halbkreiſe von Meſſing, welcher in 180 Grade, und zuweilen noch in halbe Grade eingetheilt iſt. Man kann es in dieſer Geſtalt faſt in jedem Reißzeuge finden. Es iſt jedoch der Gebrauch davon durchaus mit keiner Genauigkeit verbunden; theils, weil die Eintheilung ſelten genau iſt; theils, weil auch im Gebrauche ſehr leicht gefehlt wird.

Man hat jedoch auch Transporteurs in viereckiger Geſtalt, beſonders in engliſchen Reißzeugen, deren Verfertigung aber auf denſelben Grundſätzen beruht. Der beſte Transporteur iſt der ſogenannte geradlinichte, welcher aber erſt in der Trigonometrie erwähnt werden kann, wo ich die Verfertigung deſſelben zeigen werde.

Der Gebrauch des gewöhnlichen Transporteurs iſt folgender: Man legt ihn mit ſeinem Durchmeſſer an den rückwärts-verlängerten einen Schenkel des gegebenen ∠, und zwar mit dem Mittelpunkte an den Scheitelpunkt an; ſo ſchneidet der andere Schenkel im Halbkreiſe die Anzahl Grade, welche der ∠ hat, ab. Auf ähnliche Art trägt man auch auf einer gegebenen Linie einen ∠ auf, indem man den Mittelpunkt des Transporteurs an den gegebenen Punkt und den einen Schenkel anlegt, und mit einer feinen Nadel über dem Halbkreiſe die verlangte Anzahl Grade abſticht, und dieſen Punkt mit dem Scheitelpunkte verbindet.

§. 12.

Die ∠∠ werden in rechte, ſpitzige und ſtumpfe eingetheilt.

Ein rechter ∠ iſt derjenige, welcher 90°, das iſt den vierten Theil eines Umkreiſes, zwiſchen ſeine Schenkel faßt. Es ergiebt ſich daraus, daß in einem Umkreiſe vier, und in einem Halbkreiſe zwei rechte ∠∠ vorhanden ſind.

Ein ſpitziger ∠ iſt derjenige, welcher weniger, und ein ſtumpfer ∠ der, welcher mehr als 90° enthält.

§. 13. Fig. 8.

Wenn die Schenkel eines ∠ x, nämlich DC und BC,

rückwärts verlängert werden, ſo nennt man die einander entgegengeſetzten ∠ x und y, und eben ſo C und z Scheitel=Winkel (*anguli verticales*), und diejenigen, welche neben einander liegen, wie C und x, x und z, z und y, y und C Neben=Winkel.

Denkt man ſich aus dem Durchſchnittspunkte der Schenkel einen Umkreis gezogen, ſo iſt es klar, daß F G der Durchmeſſer dieſes Kreiſes, und F G H ein Halbkreis iſt und 180° enthält; es ſind alſo

$$\angle y + \angle z = 180^\circ,$$

auf dieſelbe Art ſind auch

$$\angle x + \angle z = 180^\circ \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Es haben alſo zwei Neben∠ zuſammen immer 180°; oder, was einerlei iſt, ſie ſind zwei rechten ∠ gleich.

Wenn deßhalb zwei Neben∠ einander = ſind, ſo ſind ſie rechte ∠, indem jeder 90° haben muß.

Die Scheitel∠ ſind einander gleich; nämlich es iſt

$$\angle x = \angle y, \angle C = \angle z.$$

Beweis:

Es iſt $\angle x + \angle z = 180^\circ$ }
und auch $\angle y + \angle z = 180^\circ$ } als Neben∠.

Alſo auch $\angle x + \angle z = \angle y + \angle z$ nach dem bekannten Grundſatze: Wenn zwei Sachen einer dritten gleich ſind ꝛc.

Nun iſt $\angle z = \angle z$

daher durch Subtraktion $\angle x = \angle y$

welches zu erweiſen war.

Es folgt aus dem Vorigen, daß, wenn einer der vier ∠ x, y, z oder C bekannt iſt, ſo ſind es alle viere.

Es wäre z. B. $\angle C = 120^\circ$

ſo iſt $\angle C + \angle x = 120^\circ + x$

oder $180^\circ = 120^\circ + x$

und $180^\circ - 120^\circ = x$

d. i. $60^\circ = x$

alſo auch $60^\circ = y$

und $120^\circ = z$

§. 14. Fig. 9.

Wenn man die Endpunkte der Schenkel eines $\angle x$ durch eine dritte Gerade verbindet, ſo heißt die dadurch entſtandene Figur ein Dreieck ($\triangle$). (Triangulum).

Sind von einem $\triangle$ alle drei Seiten von gleicher Länge, ſo iſt es ein gleichſeitiges $\triangle$; ſind nur zwei Seiten einander gleich, ſo heißt es ein gleichſchenkliges $\triangle$; und wenn alle drei Seiten von verſchiedener Länge ſind, ein ungleichſeitiges $\triangle$.

Außer dieſen Benennungen bezeichnet man auch die $\triangle\triangle$ nach ihren $\angle\angle$; nämlich

ein $\triangle$, welches einen rechten $\angle$ hat, heißt ein rechtwinkliges; hat es einen ſtumpfen $\angle$, ein ſtumpfwinkliges; und wenn es keinen von vorigen beiden $\angle\angle$, ſondern lauter ſpitzige $\angle\angle$ hat, ein ſpitzwinkliges $\triangle$. Beide letzte Gattungen werden auch zuſammen ſchiefwinklige $\triangle\triangle$ genannt.

Im rechtwinkligen $\triangle$ nennt man gewöhnlich die längſte Seite, d. i. diejenige, welche dem rechten $\angle$ gegenüber liegt, die Hypothenuſe, und die beiden kürzern, welche den rechten $\angle$ einſchließen, die beiden Katheten.

§. 15. Fig. 10.

An den $\triangle\triangle$ ſind folgende Haupteigenſchaften zu betrachten.

1) In jedem △ iſt die Summe zweier Seiten groͤßer, als die dritte.

Naͤmlich $AB + BC > AC$

Die Richtigkeit erhellet daraus, weil der Umweg von einem Punkte zum andern immer weiter iſt, als der gerade Weg. Wenn auch das △ wie ADC geſtaltet waͤre, ſo iſt es auch hieran deutlich zu ſehen, daß $AD + DC$ gegen AC, betrachtet, ein Umweg, folglich weiter als dieſer iſt.

2) Wenn in zwei △△ ABC und abc zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen ∟ einander wechſelsweiſe gleich ſind, ſo ſind auch die ganzen △△ einander gleich.

Naͤmlich wenn

$AC = ac$, $BC = bc$ und ∟ x = ∟ y, ſo iſt auch △ ABC = △ abc.

Um dieſes einzuſehen, ziehe man mit einerlei Halbmeſſer $FC = fc$, die ⌒ $FE = fe$, ſo iſt, da ∟ y = ∟ x angenommen worden, auch ⌒ $FE = fe$; d. h. die beiden Schenkel AC und BC haben dieſelbe Auseinanderſtellung wie ac und bc. Man lege nun abc auf ABC, ſo daß ac auf AC und ba auf BC zu liegen koͤmmt, ſo wird, wegen gleicher Laͤnge dieſer Seiten und wegen der gleichen Auseinanderſtellung, der Punkt b gerade auf B und a auf A fallen, alſo auch $AB = ab$ werden, und das △ abc das △ ABC genau decken, und deßhalb beide △△ einander gleich ſeyn.

Es folgt aus dieſem:

1. Daß in gleichen △△ gleiche ∟∟ gleichen Seiten gegenuͤber ſtehen, und umgekehrt.

Denn es war angenommen, daß ∟ x = ∟ y, und wurde erwieſen, daß $AB = ab$; es liegt aber AB dem ∟ x und ab dem ∟ y gegenuͤber: folglich iſt das Obige richtig.

II. Daß durch zwei Seiten und einen eingeſchloſſenen ∠ ein Δ beſtimmt iſt.

Fig. 11.

3) Wenn eine Seite mit zwei anliegenden ∠∠ eines Δs einer Seite mit zwei anliegenden ∠∠ eines andern Δs gleich iſt, ſo ſind auch die ganzen ΔΔ einander gleich.

Nämlich wenn AC = ac, ∠ x = ∠ y, und ∠ z = ∠ u, ſo iſt auch Δ ABC = abc.

Man ziehe an den gleichen Seiten AC und ac mit gleichem Halbmeſſer die ⌒⌒ IE, ie, HG und gh, und mache die Sehnen DE = de, FG = fg, ſo wird auch ⌒ DE = de, und ⌒ FG = fg; weil ∠ x = ∠ y und ∠ z = ∠ u iſt, und deßhalb die Schenkel AB und AC mit ab und ac, und ſo auch BC und AC mit bc und ac gleiche Auseinanderſtellung haben, woraus nun von ſelbſt folgt, daß ſie in gleichen Entfernungen, nämlich AB = ab und BC = bc einander ſchneiden, und, wenn man Δ abc auf Δ ABC legt, der Punkt b genau auf B fällt, und deßhalb die ΔΔ einander vollkommen gleich ſind.

Es folgt hieraus:

I. Wie aus 2) daß in gleichen ΔΔ gleiche ∠∠ gleichen Seiten, und umgekehrt, gegenüberſtehen.

II. daß auch durch eine Seite und zwei anliegende ∠∠ ein Δ beſtimmt iſt.

Fig. 12.

4) Wenn in einem Δ alle drei Seiten allen drei Seiten eines andern Δs einander gleich ſind, ſo ſind die ganzen ΔΔ einander gleich.

Nämlich wenn AC = ac, AB = ab und BC = bc, ſo iſt auch Δ ABC = Δ abc.

Man lege ac auf AC, und eben ſo ab auf BA,

und bc auf BC genau auf, ſo müſſen, wegen der gleichen Länge der Seiten, a genau auf A, b auf B und c auf C fallen, mithin das △ abc genau das △ ABC decken, und folglich die △△ einander gleich ſeyn.

Es folgt daraus, daß durch die gegebene Länge aller drei Seiten ein △ beſtimmt iſt, oder daß aus drei Seiten nur Ein △ gebildet werden kann.

Von der Lage und Stellung gerader Linien.

§. 16. Fig. 13.

Eine Gerade AB, welche auf einer andern CD ſo ſteht, daß ſie ſich nicht mehr auf die eine, als auf die andere Seite neigt, d. h., wenn die von ihr gebildeten Neben ∠ x und y einander gleich, d. i. rechte ∠ ſind: ſo ſagt man AB ſteht auf CD ſenkrecht (!) oder perpendiculär.

Verlängert man AB, ſo wird ∠ z = ∠ x, und ∠ u = ∠ y als Scheitel ∠, weßhalb auch dieſe ∠ rechte ∠ ſind, und deshalb auch CD auf AB ! ſtehen.

Es folgt hieraus:

I. Senkrechte Linien können nur bei rechten ∠ ſtatt finden und umgekehrt.

II. Wenn eine Gerade auf einer andern ! ſteht, ſo ſteht auch dieſe auf jener !.

§. 17. Fig. 14.

Wenn ein Punkt einer ! von zwei Punkten einer Linie, worauf ſie ! ſteht, = weit entfernt iſt, ſo iſt auch jeder andere Punkt jener ! = weit von jenen zwei Punkten entfernt.

Nämlich wenn AE = EC, und BD ! AC ſo iſt auch AF = FC, BA = BC, AO = OC ꝛc.

Beweis:

1) Denn da AE = EC, vermöge der Vorausſetzung,
und BE = BE
∟ x = ∟ y wegen der !

ſo iſt auch △ ABE = △ CBE, zwei Seiten mit dem eingeſchl. ∟

und auch AB = CB

2) Oder da AE = EC wie oben
FE = FE
∟ x = ∟ y wie oben

ſo iſt auch △ AFE = △ CFE

und auch AF = CF

w. z. e. w.

3) Aus 1) folgt auch ∟ n = ∟ m
und AB = CB } in =en △△ ſtehen =Seiten = ∟ gegenüber. §. 15. 2. I.
Da nun BD = BD

ſo iſt auch △ ABD = △ CBD

und auch AD = CD

w. z. e. w.

§. 18. Fig. 14.

Wenn zwei Punkte einer Geraden von zwei Punkten einer andern Geraden = weit entfernt ſind, ſo ſtehen dieſe Linien auf einander ſenkrecht.

Nämlich wenn AB = CB und AE = CE, ſo iſt auch BC ! AC.

Beweis:

1) Es iſt AB = CB } vorausgeſetzt
und AE = CE }
Da nun auch BE = BE

ſo iſt auch $\triangle$ ABE = $\triangle$ CBE

und auch $\angle x = \angle y$

Da nun x und y Neben $\angle$; gleiche Neben $\angle$ aber rechte, und rechte $\angle$ nur an ! ſtatt finden, ſo ſteht auch BE in E ! auf AC, w. z. e. w.

2) Oder AB = CB } angenommen.
und AD = CD }
und da BD = BD

ſo iſt auch $\triangle$ ABD = $\triangle$ CBD

und auch $\angle n = \angle m$ §. 15. 2. I.
Da nun auch BE = BE

ſo iſt auch $\triangle$ ABE = $\triangle$ CBE

und $\angle x = \angle y$

übrigens wie Nro. 1.

§. 19. Fig. 14.

Von allen Geraden, die von einem Punkte auf eine andere Gerade gezogen werden können, iſt immer die Senkrechte die kürzeſte.

Nämlich es iſt AE < AF, AE < AB ꝛc.

Beweis:

Es ſey AF = FC, und AE = EC;

ſo iſt AF + FC > AC } zwei Seiten eines $\triangle$ größer als die dritte,
d. i. AF + FC > AE + EC (A

Da nun AF = CF }
und AE = CE } angenommen

ſo iſt in A nun AF + AF > AE + AE

d. i. 2 AF > 2 AE

alſo auch AF > AE

w. z. e. w.

Daſſelbe kann nun auch von AB, AD, AO in Bezug auf AE erwieſen werden.

Es folgt hieraus:

I) Daß aus einem Punkte auf eine Gerade, nur eine ! gezogen werden kann. Denn von allen Geraden AB, AD, AO, AF, AE kann nur eine die kürzeſte ſeyn.

II) Daß die Entfernung eines Punktes von einer Geraden nichts anders iſt, als die !, welche von dieſem Punkte auf die Gerade gezogen werden kann.

§. 20. Fig. 15.

Wenn zwei rechtwinklige △△ die Hypothenuſe und eine Kathete = haben, ſo ſind die ganzen △△ einander =.

Man lege die beiden △△ mit den gleichen Katheten an einander, ſo werden die übrigen beiden Katheten, wegen der rechten ∟ x und y eine gerade Linie bilden.

Wenn nämlich AB = BC, und ∟ x = ∟ y als rechte ∟, BE aber = BE als gleiche Katheten, ſo müſſen AE und EC eine gerade Linie bilden, da beide auf BE ! ſtehen, und es entſteht das gleichſchenklige △ ABC. Da nun BE auf AC ! ſteht, und B ſo weit von A als von C entfernt iſt, ſo muß, nach §. 18., auch AE = EC, und △ ABE = △ BCE ſeyn, w. z. e. w.

Vermöge §. 17. u. f. können nun nachſtehende Aufgaben gelöſet werden.

§. 21. Fig. 16.

Erſte Aufgabe:

Eine gegebene Gerade in zwei =e Theile zu theilen.

Auflöſung:

Mit einerlei Halbmeſſer, nicht viel kleiner als AB, mache man aus A und B Durchſchnitts ⌒ in C und D, und verbinde die Durchſchnitts-Punkte dieſer ⌒ durch die Gerade CD, ſo wird ſolche die gegebene Gerade AB in E in zwei gleiche Theile theilen, und

AE = BE ſeyn.

Beweis:

Es iſt AC = BC
und AD = BD } vermöge der Conſtruktion.
und auch CD = CD

Daher △ ACD = △ BCD

und auch ∟ x = ∟ y, §. 15. 2. I.
da nun auch CE = CE

ſo iſt auch △ ACE = △ BCE
und auch AE = BE

w. z. e. w.

Sollte auf einer Seite der gegebenen Geraden, z. B. nach D zu, kein Raum ſeyn, ſo kann man auch mit einem kleinern Radius als AC auf derſelben Seite, z. B. in G, ⌒ ſchlagen, C mit G verbinden und bis auf AB verlängern, ſo wird ebenfalls AE = BE werden.

Beweis:

In dieſem Falle iſt

AC = BC } v. d. E.
und AG = BG }
aber auch GC = GC

und deßhalb △ AGC = △ BGC

und auch ∟ r = ∟ s
aber nun auch ∟ o = ∟ n als Neben∟ der vorigen.
Da nun ſchon AG = BG
und noch GE = GE

ſo muß auch △ AGE = △ BGE

und deßhalb AE = BE ſeyn.

w. z. e. w.

Anmerkung. So richtig auch dieſe Aufgabe gelöſet und der Beweis geführt iſt, ſo wenig iſt dieſe Auflöſungsart in der Ausübung, beſonders wenn es auf große Genauigkeit ankömmt, anwendbar. Denn man darf bei Ziehung der Linien nur im Geringſten von dem Lineal abweichen, oder ſolches nicht völlig genau anlegen ꝛc., ſo werden die Theile nicht völlig gleich werden. Das Sicherſte iſt hier, mit dem Zirkel durch Verſuche die Mitte zu finden, wozu vor allen der ſogenannte Haarzirkel die beſten Dienſte thut, vorzüglich wenn die Schraube nicht in der Mitte des Schenkels, ſondern ungefähr einen halben Zoll von der Spitze deſſelben angebracht iſt.

§. 22. Fig. 17.

Zweite Aufgabe:

In einem gegebenen Punkte einer Geraden AB eine ⊥ zu errichten.

Auflöſung:

Aus dem gegebenen Punkte E trage man nach beiden Seiten gleiche Entfernungen, nämlich CE = ED auf, ziehe mit einerlei Halbmeſſer CF = DF Durch=

ſchnitts ⌒⌒ in F, und verbinde den Durchſchnitts-Punkt F mit dem gegebenen Punkte E, ſo ſteht FE in E ! auf AB.

Beweis:

Denn es iſt CE = DE } v. d. C.
und CE = DF
und noch FE = FE

Alſo auch △ CFE = △ DFE

und auch ∟ x = ∟ y

Da nun x und y gleiche Neben∟∟, d. i. rechte ∟∟ ſind, ſo ſteht auch FE ! auf AB, w. z. e. w.

§. 23. Fig. 18.

Dritte Aufgabe:

Von einem außerhalb einer Geraden gegebenen Punkte eine Senkrechte auf ſolche fallen zu laſſen (zu fällen).

Auflöſung:

Aus dem gegebenen Punkte F ſchlage man auf der Geraden den ⌒ COD, und nun aus den Punkten C und D, wo der ⌒ die Gerade ſchneidet, die Durchſchnitts ⌒⌒ in G, und verbinde G mit F, ſo ſteht FG in E ! AB.

Beweis:

Denn es iſt CF = DF } v. d. C.
CG = CG
und FG = FG

Daher △ CFG = △ DFG

und ∟ x = ∟ y

Da nun auch CE = CE

ſo iſt auch △ FCE = △ FDE

und ∟ m = ∟ n

und da m und n gleiche Neben∠ oder rechte ∠ ſind, ſo ſteht auch FE ! auf AB, w. z. e. w.

§. 24. Fig. 19.

Wenn zwei Geraden AB und CD immer gleichweit von einander entfernt bleiben, ſo heißen ſie Parallelen oder gleichlaufende Linien.

Es folgt hieraus:

I) Daß alle !!, welche von einer dieſer Linien zur andern gezogen werden, = ſind.

Aus §. 19. wiſſen wir, daß die Entfernung eines Punktes von einer Linie nichts anders iſt, als die !, welche von dem Punkte auf die Linie gezogen werden kann. Da nun dieſe Linien AB und CD überall gleiche Entfernungen haben, ſo folgt auch, daß die !! AC, EF, GH, BD ꝛc. alle einander = ſeyn müſſen.

Ferner folgt daraus:

II) Daß auch dieſe !! mit einander # (parallel) laufen.

Denn es iſt AC = EF nach Vorigem
CE = CE
und ∟ x = ∟ y wegen der !!

Alſo auch △ ACE = △ FCE zwei rechtwinklige △△ die Hypoth. und eine Kathete = haben.

Daher auch AE = CF

Es ſind aber AE und CF ! auf AC und EF, und deßhalb jene Linien auch die Entfernungen der letztern; und da ſie = ſind, ſo müſſen auch die letztern mit einander # laufen.

Man pflegt deßhalb auch ſolche Linien, wie AC und EF, Senkrechte zwiſchen Parallelen, oder auch Parallelen zwiſchen Parallelen zu nennen, welche immer einander = ſind.

Wenn zwei Gerade nicht parallel laufen, ſo werden ſie ſich auf der einen Seite einander nähern, und auf der entgegengeſetzten von einander entfernen, auf welcher Seite ſie ſodann divergirend, auf jener aber, wo ſie ſich nähern, convergirend genannt werden.

§. 25. Fig. 20.

Wenn zwei Parallel-Linien von einer dritten Geraden geſchnitten werden, ſo entſtehen mehrere ∠∠, und zwar nennt man

x und p, und eben ſo o und u Wechſel-Winkel. Ferner heißen z und p innere und äußere Winkel auf einerlei Seite. Solche ∠∠ ſind auch v und x, u und q, o und y.

Von dieſen ∠∠ laſſen ſich nun folgende Eigenſchaften erweiſen.

1) Die Wechſel-Winkel ſind einander gleich. Nämlich es iſt

$$\angle x = \angle p$$

Um dieſes darzuthun, errichte man in den Durchſchnitts-Punkten a und b die ! ! bc und ad.

Beweis:

So iſt ∠ r = ∠ s als rechte
ab = ab die Hypothenuſe
bc = ad als ! ! zwiſchen #

Alſo auch △ abc = △ abd (26

und auch ∠ x = ∠ p, welche den gleichen Seiten bc und ad gegenüber liegen, w. z. e. w.

Nun läßt ſich auch erweiſen, daß der ſtumpfe ∠ u ſeinem Wechſel ∠ o = iſt.

Beweis:

Hier iſt $ac = bc$
und $\angle m = \angle n$ } aus A

Da nun auch $\angle \alpha = \angle \beta$ als rechte

So iſt auch
$\angle (n + \alpha) = \angle (m + \beta)$

d. i. $\angle o = \angle u$

w. z. e. w.

2) Innere und äußere $\angle\angle$ auf einerlei Seite ſind einander gleich. Nämlich es iſt $\angle z = \angle p$, $q = u$, $y = o$, $v = x$.

Beweis:

Es iſt $\angle z = \angle x$ als Scheitel $\angle$
und $\angle x = \angle p$ als Wechſel $\angle$

Alſo auch $\angle z = \angle p$, w. z. e. w.

Eben ſo läßt ſich auch der Beweis von den übrigen ſo eben angeführten Winkeln machen.

3) Zwei innere $\angle\angle$ auf einerlei Seite machen zuſammen 180°. Nämlich
$u + p = 180°$, und $x + o = 180°$.

Beweis:

Denn es iſt $z + u = 180°$ als Neben $\angle$
aber auch $\angle z = \angle p$ aus Nro. 2.

Alſo auch $u + p = 180°$ weil Gleiches für Gleiches geſetzt werden kann.

w. z. e. w.

Eben ſo läßt ſich auch der Beweis von x und o führen.

Es folgt nun auch

4) Daß zwei äußere auf einerlei Seite zuſammen 180° ausmachen. Nämlich es iſt auch $\angle z + \angle q = 180°$.

Beweis:

z und q ſind nichts anders, als die Neben ∠∠ von v und p, und müſſen deßhalb auch zuſammen 180° halten.

Denn da $u + p = 180°$
und $u = q$
und $p = z$ } als äußere und innere ꝛc.

So iſt auch $q + z = 180°$

w. z. e. w.

Aus dem Vorhergehenden läßt ſich nun mit Sicherheit ſchließen:

1) wenn zwei Wechſel ∠∠ einander gleich ſind,
2) wenn zwei äußere und innere ∠∠ auf einerlei Seite einander gleichen,
3) wenn zwei innere oder auch zwei äußere ∠∠ zuſammen 180° halten:

ſo laufen die zwei Geraden, an welchen dieſes der Fall iſt, mit einander parallel.

§. 26. Fig. 21.

Aufgabe:

Es ſoll durch den gegebenen Punkt C zu der Geraden AB eine # gezogen werden.

Auflöſung:

Aus C ſchlage man mit einem Halbmeſſer > CD den ⌒ EF, und aus E und F die Durchſchnitts ⌒⌒ in G, und ziehe CD, indem man das Lineal an C und den Durchſchnittspunkt G anlegt. Ferner errichte man in einem beliebigen Punkte H der gegebenen Geraden, nach §. 22. eine ⊥ HI, und trage CD auf HI auf, ſo daß HK =

CD werde; endlich ziehe man CK, ſo iſt CK # AB: weil ihre ſenkrechten Entfernungen CD und HK, vermöge der Conſtruktion, einander gleich ſind.

Auf dem Felde würde dieſe Conſtruktion ſich nicht ſo leicht machen laſſen; man kann aber hier durch Hülfe der Wechſel- oder innern und äußern ∟∟ ſehr leicht eine # durch einen gegebenen Punkt ausſtecken.

Man ſtecke nämlich durch den Punkt C eine Gerade ab, welche die gegebene in einem beliebigen Punkte, z. B. in L, ſchneidet. Nun meſſe man den ∟ x und trage ſolchen an C dergeſtalt auf, daß entweder ∟ y = ∟ x, oder auch daß ∟ o = ∟ x werde, und verlängere ſeinen Schenkel, ſo wird MK # AB: weil im erſten Falle die innern und äußern, und im zweiten die Wechſel∟∟ einander = ſind.

Anmerkung. Bei vorzüglicher Genauigkeit würde man zu Meſſung und Abſteckung dieſer ∟∟, immer ein ∟ Inſtrument haben müſſen; ſollte es aber nicht auf große Genauigkeit ankommen, ſo kann jede Schnur oder Leine zu Uebertragung eines ∟ dienen.

Fig. 22.

Z. B. es ſoll der ∟ x gemeſſen, und an A auf AE aufgetragen werden.

Aufloſung:

Man nehme in den Schenkeln ad und ae des ∟ x die Punkte b und c beliebig an, doch nicht zu nahe an a, befeſtige in a, b und c Pflöcke, und an ſolche eine Schnur dergeſtalt, daß nicht allein dieſelbe ganz feſt angeſpannt, ſondern auch die drei Pflöcke unverſchiebbar in ſelbiger befeſtigt ſind, und gleichſam das △ abc von der Schnur gebildet iſt.

Nun ziehe man die Pflöcke aus der Erde heraus, und übertrage abc auf die Linie AE, ſo daß der Pflock a in A, c in AE und b, wohin es trifft (wenn die Schnur völlig angeſpannt iſt), zu ſtehen komme, ſo wird auch ∟ y = ∟ x werden.

Denn es iſt bekannt, daß durch drei Gerade ein △ beſtimmt iſt; da nun hier △ ABC = abc iſt, ſo iſt auch der ∟ y = ∟ x.

§. 27. Fig. 23.

In einem Umkreiſe iſt der Durchmeſſer die grösste Sehne.

Obſchon die Richtigkeit hiervon ſehr einleuchtend iſt, ſo kann doch dieſes auch ſehr leicht folgender Geſtalt dargethan werden.

B e w e i s:

Es iſt $AC + CB = AB$

da nun $CB = CD$ als Radien

ſo iſt auch $AC + CD = AB$

Nun iſt aber $AC + CD > AD$ } zwei Seiten grösser als die dritte.

Alſo auch $AC + CB > AD$

d. i. $AB > AD$

w. z. e. w.

Die Sehnen werden aber immer kleiner, jemehr ſie ſich vom Durchmeſſer entfernen. Nämlich es iſt auch

$$AE < AD$$

B e w e i s:

Es iſt $CD < CF + FD$, zwei Seiten ꝛc.

Es iſt aber $CD = CE = CF + FE$

Daher auch $CF + FE < CF + FD$ } ſubtrahirt
$CF = CF$

woraus $FE < FD$

Ferner iſt $AE < AF + FE$

Und um ſo mehr $AE < AF + FD$

d. i. $AE < AD$

w. z. e. w.

§. 28. Fig. 24.

Wenn eine Sehne AB von einer Geraden GD geſchnitten wird, und zwei von folgenden fünf Bedingungen Statt finden, ſo laſſen ſich die drei übrigen erweiſen.

Nämlich:

I. Daß GD durch den Mittelpunkt geht;
II. — GD den ∠ ACB in zwei =e Theile theilt;
III. — GD den ⌒ ADB in zwei =e Theile theilt;
IV. — GD auf AB ! ſteht;
V. — GD die Sehne AB in zwei =e Theile theilt.

Erſter Fall.

I. und II. angenommen, III., IV. und V. zu erweiſen.

Beweis:

Es iſt AC = BC als Halbmeſſer
CE = CE
und ∠ x = ∠ y vermöge II.

Alſo auch △ ACE = △ BCE
und ∠ m = ∠ n
und auch AE = EB

wodurch V. erwieſen. Da nun n und m, als =e Neben∠, rechte ∠ ſind, ſo ſteht auch GD ! AB, und es iſt auch IV. erwieſen.

Ferner iſt auch CD = CD
daher auch △ ACD = △ BCD
alſo auch AD = BD
und auch ⌒ AD = ⌒ BD

weil =e Sehnen gleiche ⌒ ſpannen;
wodurch nun auch III. erwieſen iſt.

Zweiter Fall.

II. und IV. angenommen, I., III. und V. zu erweiſen.

Beweis:

Es iſt $\angle x = \angle y$ aus II.

$\angle n = \angle m$ aus IV.

und $CE = CE$

Alſo auch $\triangle ACE = \triangle BCE$ (A

und $AE = BE$

wodurch V. erwieſen.

Nun iſt auch $\angle o = \angle s$, als Neben∠ von n und m.

und $ED = ED$

Mithin auch $\triangle AED = \triangle BED$

und $AD = BD$

weßhalb auch $\frown AD = \frown BD$, gleiche Sehnen ꝛc. (B

wodurch auch III. erwieſen.

Da nun auch $\angle p = \angle q$, als Neben∠ von x und y

und $GC = GC$

und übrigens $AC = BC$, wegen A

ſo iſt auch $\triangle AGC = \triangle BGC$

und $AG = BG$

und auch $\frown AG = \frown BG$ (C

und nun aus B und C

$\frown (AD + AG) = \frown (BD + BG)$

---

d. i. $\frown DAG = \frown DBG$

Mithin der ganze Umkreis in zwei gleiche Theile getheilt, welches nur durch den Durchmeſſer geſchehen kann; und da nun dieſer durch den Mittelpunkt geht, ſo iſt auch I. erwieſen.

Dritter Fall.

III. und IV. angenommen, I., II. und V. zu erweiſen.

Beweis:

Es iſt $\angle$ n = $\angle$ m aus IV.

daher auch $\angle$ o = $\angle$ s als Neben $\angle\angle$ der vorigen und rechte.

Da nun ⌒ AD = ⌒ DB aus III.

ſo iſt auch AD = DB, =e Sehnen ſpannen =e ⌒⌒

übrigens auch ED = ED

Alſo nun △ AED = △ BED als rechtwinklige △△

und auch AE = BE

wodurch V. erwieſen.

Nun iſt ferner CE = CE

daher auch △ ACE = △ BCE

und $\angle$ x = $\angle$ y

wodurch auch II. erwieſen.

Um nun auch I. zu erweiſen, verfährt man wie im zweiten Falle.

Es finden überhaupt für dieſen Satz zehn verſchiedene Beweiſe Statt, ſo wie ſolche die nachſtehende Tabelle angiebt. Ich überlaſſe es jedoch dem fleißigen Schüler (als das beſte Mittel, ſich den Satz und ſeine Beweiſe einzuprägen), die übrigen zur Übung für ſich zu machen. Es wird dieſes nicht ſchwer fallen, ſo bald man die vorigen drei gehörig verſtanden und inne hat.

Nro.	Angenommen.		Zu erweiſen.		
1.	1.	2.	3.	4.	5.
2.	1.	3.	2.	4.	5.
3.	1.	4.	2.	3.	5.
4.	1.	5.	2.	3.	4.
5.	2.	3.	1.	4.	5.
6.	2.	4.	1.	3.	5.
7.	2.	5.	1.	3.	4.
8.	3.	4.	1.	2.	5.
9.	3.	5.	1.	2.	4.
10.	4.	5.	1.	2.	3.

Es folgen aus dem vorigen Satze nun nachſtehende Aufgaben.

§. 29. Fig. 25.

Erſte Aufgabe:

Man ſoll durch drei gegebene Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, einen Kreis beſchreiben.

Auflöſung:

Man verbinde die drei Punkte A, B und D durch grade Linien AB und DB, welche nun Sehnen des zu ziehenden Kreiſes werden. Ferner theile man beide Sehnen, nach §. 21., in zwei = e Theile, und ziehe die Theilungs-Linien MN und PQ, ſo wird ihr Durchſchnitts-Punkt C der Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes ſeyn.

Denn die Geraden, welche die Sehnen in zwei =e Theile theilen, und auf ſolchen ! ſtehen, gehen nach §. 28. auch durch den Mittelpunkt. Es gehen aber auf dieſe Art beide durch den Mittelpunkt, haben aber nur den einzigen Punkt C mit einander gemein; ſo muß auch dieſes der Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes ſeyn, welcher durch die Punkte AB und D geht.

§. 30.

Zweite Aufgabe:

Es iſt ein Kreis gegeben, deſſen Mittelpunkt geſucht werden ſoll.

Auflöſung:

I) Man nehme in dem gegebenen Umkreiſe drei Punkte nach Willkühr an, verbinde ſie durch Sehnen, und verfahre übrigens wie bei voriger Auflöſung §. 29.

Fig. 26.

II) Oder man ziehe nach Belieben eine Sehne DE in dem gegebenen Kreiſe, halbire ſie nach §. 21., ſo wird NM der Durchmeſſer ſeyn, weil er die Sehne halbirt und ! darauf ſteht. Dieſen Durchmeſſer halbire man wieder auf dieſelbe Art, mittelſt Durchſchnitts ⌒ in G und H, und verbinde G mit H, ſo wird der Punkt, wo GH den Durchmeſſer NM ſchneidet, der geſuchte Mittelpunkt ſeyn.

Denn, da MN ! DE, und die Sehne DE in zwei =e Theile theilt, ſo geht auch MN durch den Mittelpunkt, der nun augenſcheinlich in C liegt, weil durch die Conſtruktion MC = NC iſt.

§. 31. Fig. 27.

Dritte Aufgabe:

Es iſt ein ∟ NOM gegeben, man ſoll ſolchen in zwei =e Theile theilen.

Auflöſung:

Man ziehe mit willkührlichem Radius aus O den ⌒ PQ und ſodann die Sehne PQ; ſchlage ferner aus P und Q Durchſchnitts ⌒⌒ in R, und verbinde R mit O, ſo iſt ∟ x = ∟ y.

Beweis:

Denn es iſt PR = QR
und OP = OQ
und auch OR = OR

Folglich △ OPR = △ OQR

und ∟ x = ∟ y

w. z. e. w.

Oder man ſchlage aus P und Q in R und S ⌒⌒, verbinde R mit S und verlängere RS rückwärts, ſo wird RS in O eintreffen, und ∟ x = ∟ y.

Denn RS ſteht ! auf PQ, und theilt auch PQ in zwei =e Theile, geht alſo vermöge §. 28. durch den Mittelpunkt O, und theilt auch den ∟ POQ in zwei =e Theile, w. z. e. w.

§. 32. Fig. 28.

Eine Gerade AB, welche in der Ebene des Kreiſes liegt, und den Umkreis in einem einzigen Punkte E berührt, übrigens aber gänzlich außerhalb der Kreisfläche liegt, heißt eine Tangente oder Berührungslinie, und der Punkt E der Berührungspunkt.

Wenn man nun an den Berührungspunkt E einen Halbmeſſer zieht, ſo ſteht er ! auf der Tangente.

Der Kreis hat nur einen Punkt mit der Tangente gemein, deſſen Entfernung von C der Radius ſeyn muß; da nun die Entfernung eines Punktes von einer Geraden

eine ! iſt, ſo ſteht auch CE ! auf AB. Wollte man annehmen, es ſey eine andere Linie, z. B. CN, die kürzeſte, ſo iſt als Radien CS = CE, und augenſcheinlich

$$CS + SN > CE$$

man mag auch CN noch ſo nahe an CE, und SN noch ſo klein annehmen.

Man kann nun auch umgekehrt ſagen: *wenn eine Gerade AB auf dem äußerſten Punkte eines Halbmeſſers ! ſteht, ſo iſt ſie die Tangente des zugehörigen Kreiſes.*

Denn die ! AB begegnet dem Umkreiſe nur in dem einzigen Punkte E (weil der Halbmeſſer CE keinen andern Punkt in der Peripherie hat), und liegt übrigens gänzlich außerhalb der Zirkelfläche, folglich iſt ſie Tangente des zugehörigen Kreiſes.

Es folgen nun aus Vorigem nachſtehende Aufgaben.

§. 33. Fig. 28.

Erſte Aufgabe:

Den Berührungspunkt einer Tangente zu finden.

Obgleich der Kreis nur in einem einzigen Punkte von der Tangente berührt wird, ſo iſt es doch nicht gut möglich, eine Tangente ſo zu ziehen, daß man den Berührungspunkt als einzigen Punkt bemerkt, und die Tangente nicht in mehreren Punkten ſich mit dem Kreiſe vereinigt.

Auflöſung:

Um nun den eigentlichen Berührungspunkt zu beſtimmen, ſo ſchlage man mit einem etwas größeren Halbmeſſer, als der des Kreiſes iſt, einen ⌒, der die Tangente in A und B ſchneidet; ferner ziehe man aus A und B Durchſchnitts ⌒⌒ in D, und verbinde D mit C, ſo iſt E, nämlich der Punkt, wo DC die Tangente ſchneidet, der Berührungspunkt.

Beweis:

Denn es iſt AC = BC }
und auch AD = BD } v. d. C.
Da nun auch CD = CD

Alſo auch $\triangle$ ACD = $\triangle$ BCD

und auch $\angle$ x = $\angle$ y
Da nun auch CE = CE

ſo muß auch $\triangle$ ACE = $\triangle$ BCE

und $\angle$ n = $\angle$ o ſeyn.

Da nun n und o rechte $\angle\angle$, ſo ſteht auch CE ! auf der Tangente; und da CE der Radius iſt, und ! auf der Tangente ſteht, ſo iſt auch E der Berührungspunkt. w. z. e. w.

§. 34. Fig. 29.

Zweite Aufgabe:

Es iſt der Kreis gegeben, und ſoll zu ſolchem aus dem Punkte A eine Tangente gezogen werden.

Auflöſung:

Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte C, und verlängere dieſe Linie unbeſtimmt etwas über A hinaus, und über C, bis ſie den Kreis zum zweiten Male in G ſchneidet. Nun ſchlage man aus A mit dem Radius AC den ⌒ CED, und auch aus C mit dem Durchmeſſer des Kreiſes GH den ⌒ FD, welcher die Linie GA in F, und den ⌒ CED in D ſchneidet; endlich verbinde man den Durchſchnittspunkt D mit dem Mittelpunkte des Kreiſes C: ſo wird dieſe Gerade den Kreis in dem Berührungspunkte B ſchneiden, und wenn man B mit A verbindet, AB die geſuchte Tangente ſeyn.

Beweis:

Da CD = HG = Durchmeſſer
ſo iſt auch CD = CB + BD = zwei Radien

und deßhalb CB = DB
nun iſt auch AC = AD v. d. C.
und AB = AB

Alſo auch △ ABC = △ ABD

$\angle$ x = $\angle$ y

und deßhalb AB ! auf CB; und da CB der Radius iſt, ſo muß auch AB die Tangente ſeyn, w. z. e. w.

§. 35. Fig. 30.

Dritte Aufgabe:

Es iſt ein ⌒ ABD gegeben, und ſeine Tangente EF; man ſoll, ohne den Kreis zu vollenden, oder deſſen Mittelpunkt zu wiſſen, den Berůhrungspunkt B finden.

Auflöſung:

Man ziehe zu der Tangente EF durch den ⌒ eine # NO, welche jenen in G und H ſchneidet; aus dieſen Punkten ſchlage man nun ⌒⌒, die ſich in I und K kreuzen, ziehe IK, ſo wird ſolche die Tangente in dem Berůhrungspunkte B ſchneiden.

Beweis:

Denn es iſt IG = HI }
und KG = HK } v. d. C.
und noch IK = IK

Daher △ IGK = △ IHK

und auch $\angle$ n = $\angle$ o

Da nun IL = IL

ſo iſt auch △ GIL = △ HIL

und ∟ x = ∟ y
aber auch ∟ r = ∟ x }
und ∟ s = ∟ y } als äußere und innere

alſo auch ∟ r = ∟ s

Es ſteht alſo KB ! auf EF. Da nun KB die Sehne HG in zwei =e Theile theilt, und auf ſolcher ! ſteht: ſo geht auch KB, wenn ſie rückwärts genug verlängert würde, durch den Mittelpunkt, und würde der Durchmeſſer des Kreiſes werden, zu welchem der ⌒ gehört. Da alſo EB auf dem Durchmeſſer, und deßhalb auch auf dem Halbmeſſer ! ſteht, ſo iſt auch B der geſuchte Berührungspunkt.

§. 36. Fig. 31.

Wenn zwei oder mehrere Kreiſe in einer und derſelben Ebene liegen, und einander in einem einzigen Punkte berühren, ſo liegen auch ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie.

Man darf nur, dieſes einzuſehen, durch den gemeinſchaftlichen Berührungspunkt auch die gemeinſchaftliche Tangente ziehen, ſo werden alle Halbmeſſer darauf ! ſtehen, folglich auch in einer geraden Linie liegen.

§. 37. Fig. 31½.

Der ∟ n, welcher am Umkreiſe von einer Tangente und Sehne gebildet wird, hat zu ſeinem Maaße den halben ⌒, welchen ſeine Sehne abſchneidet.

Nämlich es iſt ∟ n = ½ ⌒ BFE.

Conſtruction:

Man ziehe den Durchmeſſer NM # BE, und den Durchmeſſer OF ! BE, und den Halbmeſſer BC an den Berührungspunkt.

Beweis:

Es iſt $\angle y + \angle m = 90°$ }
Eben ſo $\angle x + \angle n = 90°$ } v. d. C.

Alſo auch $\angle y + \angle m = \angle x + \angle n$
Da nun $\angle x = \angle y$ als Wechſel $\angle$

ſo iſt auch $\angle n = \angle m$

Nun iſt $\angle m = \frown BF$
aber auch $\frown BF = \frac{1}{2} \frown BFE$
weil OF ! BE und durch den Mittelpunkt geht.

Alſo auch $\angle m = \frac{1}{2} \frown BFE$
und auch $\angle n = \frac{1}{2} \frown BFE$

w. z. e. w.

§. 38. Fig. 32.

Wenn ein $\angle$ n am Umkreiſe von zwei Sehnen gebildet wird, ſo iſt ſein Maaß der halbe $\frown$, welchen ſeine Schenkel abſchneiden.

Nämlich $\angle n = \frac{1}{2} \frown HG$.

Conſtruction:

Durch den Scheitel B des $\angle$ ziehe man die Tangente AF.

Beweis:

Es iſt $\angle m + \angle n + \angle o = 180°$ weil ſie einen Halbkreis einſchließen.

oder auch $\angle m + \angle n + \angle o = \frac{1}{2} BIHGKB$ das näml.
oder auch $\angle m + \angle n + \angle o = \frac{1}{2} BIH + \frac{1}{2} HG + \frac{1}{2} GKB$

Da nun $\angle m = \frac{1}{2} BIH$
und $\angle o = \frac{1}{2} GKB$ } aus §. 37.

ſo iſt auch

$\frac{1}{2} BIH + \angle n + \frac{1}{2} GKB = \frac{1}{2} BIH + \frac{1}{2} HG + \frac{1}{2} GKB$

d. i. $\angle n = \frac{1}{2} HG$

wenn man die gleichen Glieder beiderſeits weg läßt.

w. z. e. w.

§. 39.

Aus dem Vorhergehenden laſſen ſich nun nachſtehende Folgerungen herleiten.

Fig. 33.

I) Alle $\angle$ am Umkreiſe, welche mit ihren Schenkeln auf einer und derſelben Sehne ſtehen, ſind einander =.

Nämlich es iſt $\angle x = \angle o = \angle n$.
Denn aus vorigem §. iſt
$\angle x = \frac{1}{2} ABC$, $\angle o = \frac{1}{2} ABC$
und $\angle n = \frac{1}{2} ABC$,
alſo auch $\angle x = \angle o = \angle n$, w. z. e. w.

Fig. 34.

II) Alle $\angle$ am Umkreiſe, welche mit ihren Schenkeln auf dem Durchmeſſer ſtehen, ſind rechte $\angle$.

Denn es iſt $\angle n = \frac{1}{2} ABE$, $\angle o = \frac{1}{2} ABE$
und $\angle z = \frac{1}{2} ABE$, nach vorigem §.
Nun iſt $ABE = \frac{1}{2}$ Umkreis
$= \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$
alſo auch $\frac{1}{2} ABE = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

w. z. e. w.

Fig. 35.

III) Wenn man in einem Kreiſe ein Viereck beſchreibt, ſo haben immer zwei einander gegenüber liegende ∠ zuſammen 180°.

Nämlich es iſt $\angle x + \angle y = 180°$
$\angle o + \angle z = 180°$

Beweis:

Es iſt $\angle x = \frac{1}{2} \frown AHC$ }
und $\angle y = \frac{1}{2} \frown ABC$ } addirt

$\angle x + \angle y = \frac{1}{2} \frown AHC + \frac{1}{2} \frown ABC$
$= \frac{1}{2} \frown (AHC + ABC)$
$= \frac{1}{2} \frown AHCBA$
= der Hälfte des ganzen Umkreiſes $= \frac{1}{2} . 360° = 180°$

w. z. e. w.

Eben ſo läßt ſich auch der Beweis von z und o führen.

§. 40. Fig. 35.

Parallele Sehnen ſchließen gleiche ⌒ ein.

Nämlich wenn AD ‡ EF, ſo iſt auch $\frown AE = \frown DF$.

Conſtr. die (Diagonale) Gerade ED.

Beweis:

Es iſt $\angle m = \angle n$ als Wechſel∠
Nun iſt $\angle m = \frac{1}{2} \frown AE$ }
und $\angle n = \frac{1}{2} \frown DF$ } als ∠ am Umkreis

Alſo auch $\frac{1}{2} \frown AE = \frac{1}{2} \frown DF$

und auch $\frown AE = \frown DF$

Wenn die Hälften zweier Sachen = ſind, ſo ſind auch die Ganzen =.

w. z. e. w.

Daſſelbe gilt auch von einer Sehne und Tangente, wenn ſie mit einander ∥ laufen.

Nämlich wenn EF ∥ GI, ſo iſt auch ⌒ EH = ⌒ FH.

Conſtr. die Gerade HF vom Berührungspunkte nach F.

Beweis:

Es iſt ∠ r = ∠ s als Wechſel∠
Nun iſt aber ∠ r = $\frac{1}{2}$ ⌒ HE als ∠ am Umkreis
und ∠ s = $\frac{1}{2}$ ⌒ HF als ∠ von Sehne und Tangente.

Alſo auch $\frac{1}{2}$ ⌒ HE = $\frac{1}{2}$ ⌒ HF
und auch HE = HF

w. z. e. w.

§. 41. Fig. 36.

Wenn eine Gerade FR außerhalb eines Umkreiſes ſo verlängert wird, daß ſie den Kreis zwei Mal, nämlich in R und in F ſchneidet, und aus dem erſten Durchſchnittspunkte R eine Sehne gezogen wird, welche mit jener Geraden einen ∠ n bildet, ſo iſt das Maaß dieſes ∠ der halbe ⌒, welchen die Sehne vorwärts, + dem halben ⌒, welche der verlängerte Schenkel rückwärts abſchneidet.

Nämlich es iſt ∠ n = $\frac{1}{2}$ ⌒ RWS + $\frac{1}{2}$ ⌒ RQF

Beweis:

Denn es iſt ∠ n + ∠ o = 180° als Neben∠
oder ∠ n + ∠ o = $\frac{1}{2}$ ⌒ RWSUFQR
∠ n + ∠ o = $\frac{1}{2}$ ⌒ RWS + $\frac{1}{2}$ ⌒ SUF + $\frac{1}{2}$ ⌒ RQF

nun iſt aber ∟ o = $\frac{1}{2}$ ⌒ SUF nach §. 38.

ſo bleibt für ∟ n = $\frac{1}{2}$ ⌒ RWS + $\frac{1}{2}$ ⌒ ROF

w. z. e. w.

§. 42. Fig. 37.

Ein ∟ m, welcher innerhalb eines Umkreiſes gebildet wird, ohne an ſolchem oder an dem Mittelpunkte anzuliegen, hat zu ſeinem Maaße die halbe Summe der ⌒⌒, welche ſeine Schenkel vorwärts, und die rückwärts verlängerten Schenkel rückwärts abſchneiden.

Nämlich es iſt ∟ m = $\frac{1}{2}$ ⌒ DE + $\frac{1}{2}$ ⌒ AB.

Conſtr. Man verlängere die Schenkel rückwärts, bis ſie den Kreis ſchneiden, und ziehe aus einem Punkte, wo ein Schenkel den Kreis ſchneidet, zu dem andern Schenkel eine # Sehne; hieraus E, EC # DN.

Beweis:

Es iſt ∟ m = u als Wechſel ∟

Nun iſt ∟ u = $\frac{1}{2}$ ⌒ ABC als ∟ am Umkreiſe

Da nun ⌒ ABC = ⌒ AB + ⌒ BC

ſo iſt auch $\frac{1}{2}$ ABC = $\frac{1}{2}$ ⌒ AB + $\frac{1}{2}$ ⌒ BC

nun iſt aber ⌒ BC = ⌒ DE # Sehnen ſchließen = e ⌒⌒ ein.

und auch $\frac{1}{2}$ ⌒ BC = $\frac{1}{2}$ ⌒ DE

Folglich ∟ u = $\frac{1}{2}$ ⌒ AB + $\frac{1}{2}$ ⌒ DE

und auch ∟ m = $\frac{1}{2}$ ⌒ AB + $\frac{1}{2}$ ⌒ DE

w. z. e. w.

§. 43. Fig. 38.

Ein ∟ m außerhalb eines Umkreiſes, deſſen

Schenkel demſelben zwei Mal begegnen, hat zu ſeinem Maaße den halben größeren ⌒ BA, weniger den halben kleineren ⌒ DE, welchen ſeine Schenkel abſchneiden.

Nämlich ∟ m = $\frac{1}{2}$ ⌒ AB — $\frac{1}{2}$ ⌒ DE

Conſtr. Man ziehe aus einem Punkte, wo ein Schenkel den Kreis zum zweiten Male ſchneidet, zu dem andern Schenkel eine # Sehne; hier aus A, AC # BE.

Beweis:

Es iſt ∟ m = ∟ u als Wechſel ∟
es iſt aber ∟ u = $\frac{1}{2}$ ⌒ CD als ∟ am Umkreiſe.
Da nun CD = CE — DE
ſo iſt auch $\frac{1}{2}$ CD = $\frac{1}{2}$ CE — $\frac{1}{2}$ DE

Alſo auch ∟ u = $\frac{1}{2}$ CE — $\frac{1}{2}$ DE
Da nun auch CE = AB weil # Sehnen = e ⌒ abſchneiden

ſo iſt auch ∟ u = $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ DE

und auch ∟ m = $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ DE

w. z. e. w.

§. 44. Fig. 39.

Ein ∟ n außerhalb eines Umkreiſes, welcher von einer Tangente und einer Linie, welche den Kreis zwei Mal ſchneidet, gebildet wird, hat zu ſeinem Maaße die halbe Differenz der ⌒, welche von dem Berührungspunkte vor- und rückwärts durch den andern Schenkel abgeſchnitten werden.

Nämlich ∟ n = $\frac{1}{2}$ ⌒ AB — $\frac{1}{2}$ ⌒ AC.

Conſtr. Eine # Sehne aus B zu der Tangente AO.

Beweis:

Es iſt $\angle n = \angle o$ als Wechſel$\angle$

Nun iſt $\angle o = \frac{1}{2} CD$, $\angle$ am Umkreiſe

Es iſt aber $CD = AD - AC$

alſo auch $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} AC$

Da nun $AD = AB$, # Sehne und Tangente

und deßhalb $\frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB$

ſo iſt auch $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AC$

nämlich $\angle o = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AC$

Folglich auch $\angle n = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AC$

w. z. e. w.

Anmerkung. Anfänger können hier auch die # aus A zu CB, und in Fig. zu §. 43. die # aus D zu CB, und in §. 42. aus B zu AE ziehen, und auf dieſe Art zu ihrer Übung die Beweiſe zu führen ſuchen.

§. 45. Fig. 40.

Ein $\angle n$, der von zwei Tangenten gebildet wird, hat zu ſeinem Maaße die halbe Differenz der ⌒⌒, welche ſeine Schenkel von den Berührungspunkten einſchließen.

Nämlich $\angle n = \frac{1}{2} BAD - \frac{1}{2} BCD$

Conſtr. Man theile den $\angle n$ durch eine Gerade NA in zwei beliebige andere $\angle\angle$, ſo daß $\angle n = \angle x + \angle y$.

Beweis:

So iſt $\angle x = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} BC$ } nach vorigem §.
und $\angle y = \frac{1}{2} AD - \frac{1}{2} DC$ }

Alſo auch $\angle x + \angle y = \frac{1}{2}(AB + AD) - \frac{1}{2}(BC + DC)$

d. i. $\angle n = \frac{1}{2} BAD - \frac{1}{2} BCD$

w. z. e. w.

Iſt hier n = 90°, ſo muß auch ⌒ BCD = 90° ſeyn. Denn es iſt ſodann

$$\angle\, n = \tfrac{1}{2}\,(360 - 90) - \tfrac{1}{2}.\, 90$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(270 - 90) = \tfrac{1}{2}.\, 180 = 90.$$

§. 46. Fig. 41.

Zum Schluſſe dieſes Abſchnitts will ich noch zeigen, wie man am Endpunkte einer Geraden eine ! errichtet.

Die früher gezeigte Methode ließ ſich nur da anwenden, wo man zu beiden Seiten des Punktes, wo die ! ſtehen ſoll, hinlänglich Raum hat, um Abſchnitte aufzutragen; hier kann aber der Punkt ganz am Rande eines Reißbrettes, Papierbogens ꝛc. liegen.

Aus B errichte man mit willkührlichem Radius BL ein gleichſeitiges △ BCL, und verlängere LC, ſo daß HC = LC = BC werde, und verbinde H mit B, ſo ſteht HB oder HI ! AB.

Um die Richtigkeit hiervon einzuſehen, ſchlage man aus C mit CL = HC = BC den Halbkreis LBC: ſo iſt LH der Durchmeſſer, und der ∠ LBH ſteht mit ſeinen Schenkeln auf den Endpunkten deſſelben, und iſt folglich ein rechter ∠.

Weiter hinten werde ich über dies Verfahren noch einen andern Beweis geben.

Von den Vielecken.

Fig. 47.

Ein Vieleck (Polygonum) iſt eine jede ebene Fläche, welche von geraden Linien eingeſchloſſen iſt.

Vermöge dieſes Begriffes gehört alſo auch das Dreieck unter die Vielecke.

Jede der einſchließenden Geraden eines Vielecks heißt eine *Seite* deſſelben, und die Summa aller Seiten wird der *Umfang* (perimeter) genannt.

Man hat Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke, — — n Ecke; je nachdem die Figur von drei, vier, fünf, ſechs — — n Seiten eingeſchloſſen iſt.

Fig. 42.

Die Benennungen der verſchiedenen Arten von △△ ſind ſchon früher gegeben worden, und nur noch zuzuſetzen: wenn in einem △ aus der Spitze eines ∟ auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung eine ! gefällt wird, ſo heißt ſie *die Höhe* des △s, und die Seite, auf welcher ſie aufſteht, wird die *Grundlinie* (basis) genannt.

Jedes Viereck, in welchem zwei einander gegenüberliegende Seiten mit einander parallel laufen, heißt ein *Parallelogramm*.

Fig. 43.

Ein *Quadrat* iſt ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten und Winkeln.

Fig. 45.

Ein *Rechteck* iſt ein Parallg. von vier gleichen ∠∠ und ungleichen Seiten; nämlich zwei und zwei Seiten ſind einander gleich.

Fig. 44.

Ein *Rhombus* oder *Rhaute* iſt ein Parallg. von vier gleichen Seiten und ungleichen ∠∠, wo wieder zwei und zwei ∠∠ einander gleich ſind.

Fig. 46.

Ein *Rhomboides* oder *länglichte Rhaute* iſt ein Parallg. von ungleichen Seiten und ungleichen ∠∠;

nämlich es ſind immer zwei und zwei ∠, und eben ſo zwei und zwei Seiten einander gleich.

Fig. 47.

Ein Trapezium iſt eine von vier Seiten eingeſchloſſene Figur, wo nur zwei Seiten mit einander parallel laufen.

Fig. 48.

Ein Trapezoides iſt eine vierſeitige Figur, wo gar keine Seite mit der andern parallel läuft, oder, welches daſſelbe iſt, welche nicht zu den vorhergehenden fünf Gattungen gerechnet werden kann.

Fig. 49.

Die Vielecke ſind überhaupt:

1) unregelmäßige, wenn weder Seiten noch ∠ am Umfange einander gleich ſind.

Fig. 50. und 51.

2) regelmäßige, wenn Seiten und ∠ am Umfange alle einander gleich ſind.

Fig. 51.

3) ſymmetriſche, wenn die Anzahl der gleichen Seiten und ∠ eine gerade Zahl, 4, 6, 8 — — 2 n, iſt.

Es ſind demnach alle regelmäßige 4ecke, 6ecke, 8ecke — — 2 n ecke regelmäßig und zugleich ſymmetriſch; hingegen alle regelmäßig 5ecke, 7ecke, 9ecke — — (2 n — 1) ecke zwar regelmäßig, aber nicht ſymmetriſch.

Fig. 49.

Jeder ∠, der in einem Vielecke, zu welcher Gattung es auch gehört, von zwei einſchließenden Seiten gebildet wird, heißt ein Vielecks- oder Polygon-Winkel, und wenn er wie x an Fig. 49. geſtaltet iſt, wird er ein eingehender ∠ genannt, hingegen ſind alle übrige derſelben Fig. ausgehende ∠.

Wenn man in einem Vielecke, aus einem Vielecks ∠

zum andern, eine Gerade zieht, ſo wird ſie eine **Diagonale** genannt. AB Fig. 51. BD Fig. 62.

Fig. 51.

Man kann nun auch von dem ſymmetriſchen Vieleck ſagen: ein Vieleck iſt ſymmetriſch, wenn man es durch eine Diagonale in zwei vollkommen gleiche Theile zerlegen kann.

Vielecke heißen **ähnlich**, wenn ſie nur in Hinſicht ihrer Seitenlängen verſchieden, ihre gleichliegenden $\angle\angle$ aber eine gleiche Anzahl Grade einſchließen.

§. 48. Fig. 52.

In jedem geradlinigen △, es mag geſtaltet ſeyn wie es will, halten alle drei $\angle$ zuſammen 180°.

Conſtr. NM durch den Scheitel des △, ♯ zur Grundlinie AB.

Beweis:

$\angle x + \angle y + \angle z = 180°$ als Halbkreis

Nun iſt $\angle x = \angle q$ } Wechſel$\angle\angle$
und $\angle z = \angle p$ }

Alſo auch $\angle q + \angle y + \angle p = 180°$

w. z. e. w.

§. 49.

Der vorhergehende Satz erlaubt nachſtehende Folgerungen.

1) Es kann in einem △ nur Ein rechter $\angle$ ſeyn; denn da dieſer 90° hat, ſo bleibt für die beiden übrigen nur 90° übrig. Iſt daher ein rechtwinkliges △ auch zugleich gleichſchenklig, ſo haben die beiden übrigen $\angle\angle$, welche an der Hypothenuſe anliegen, jeder 45°: denn ſie

ſind einander =, weil ſie gleichen Seiten (d. i. gleichen Katheten) gegenüber liegen.

2) Es kann aber auch in einem △ nur Ein ſtumpfer ∟ ſeyn: denn da dieſer über 90° hat, ſo bleibt für die beiden übrigen weniger als 90° übrig.

3) Wenn in einem △ zwei ∠∠ bekannt ſind, ſo weiß man auch den dritten: denn man darf nur ihre Summe von 180 abziehen.

Eben ſo ſind alle drei ∠∠ im rechtwinkligen △ bekannt, wenn außer dem rechten ∟ noch einer gegeben iſt.

Im gleichſchenkligen △ darf deßhalb nur ein ∟ gegeben ſeyn, um die übrigen zu wiſſen: denn da im gleichſchenkligen △ die den gleichen Schenkeln gegenüber liegenden ∠∠ einander gleich ſind, ſo ſind beide bekannt, wenn der eine gegeben iſt; man zieht deßhalb nur den doppelten gegebenen von 180 ab, ſo iſt auch der dritte gefunden. Wäre aber dieſer letzte gegeben, und man ſoll die übrigen beiden gleichen ∠∠ finden, ſo ziehe man den gegebenen von 180° ab, und halbire den Reſt, ſo iſt die Hälfte dieſes Reſtes das Maaß der beiden gleichen ∠∠.

Endlich ſind im gleichſeitigen △ alle ∠∠ einander gleich, weil ſie gleichen Seiten gegenüber ſtehen; mithin hat jeder 60°, da 3. 60° = 180°.

4) Wenn zwei ∠∠ in einem △ zweien ∠∠ eines andern △s = ſind, ſo iſt auch der dritte ∟ dem dritten gleich, und die △△ ſind einander ähnlich. Iſt übrigens noch eine Seite in einem △ einer Seite im andern △ gleich, ſo ſind die ganzen △△ einander vollkommen =: denn man hat eine Seite mit zwei anliegenden ∠∠ in beiden △△ =.

Fig. 53.

5) Die Linien AB und CD, welche einer dritten EF begegnen, werden auf der Seite BD, wenn ſie verlängert werden, endlich zuſammenſtoßen, wenn x + y

< 180°; hingegen werden ſie ſich auf der Seite AC immer weiter von einander entfernen, wenn p + q > 180°; weil ſie in der Richtung BD, wo x + y < 180, ein △ bilden werden, welches aber da, wo p + q > 180, nicht möglich iſt.

Fig. 42.

6) Wenn man in einem △ aus der Spitze eines ∠s eine ! auf die Grundlinie fället, ſo wird ſie in das △ fallen, wenn die an der Grundlinie anliegenden ∠∠ ſpitzig ſind; hingegen fällt ſie auf die verlängerte Grundlinie außerhalb des △s, wenn an ſolcher ein ∠ ein ſtumpfer iſt.

§. 50.

Es iſt zwar ſchon aus der zweiten und dritten Haupteigenſchaft der △△ hergeleitet worden, daß in gleichen △△ gleiche Seiten auch gleichen ∠∠, und umgekehrt, gegenüber liegen; es kann jedoch dieſes auch durch folgenden Satz geſchehen.

Fig. 54.

In jedem △ ſteht ein größerer ∠ auch einer größeren Seite, und ein kleinerer ∠ einer kleinern Seite gegenüber, und umgekehrt.

Es ſey ∠ y > ∠ x, ſo iſt auch CE > AE.

Conſtr. Man ſchlage durch die Spitzen aller drei ∠∠ des △s ACE den Kreis ABCDEFA, noch §. 29.

Beweis:

So iſt ∠ y = ½ ⌒ CDE }
und ∠ x = ½ ⌒ AFE } als ∠∠ am Umkreiſe

Da nun ∠ y > ∠ x angenommen

ſo iſt auch ½ ⌒ CDE > ½ ⌒ AFE

und auch $\frown$ CDE $>$ $\frown$ AFE

aber auch CE $>$ AE, w. z. e w.

weil ein größerer $\frown$ von einer größeren Sehne, und umgekehrt, geſpannt wird. (A

Oder: es ſey CE $>$ AE, ſo iſt $\angle$ y $>$ $\angle$ x.

Beweis:

Wenn CE $>$ AE angenommen

ſo iſt auch $\frown$ CDE $>$ $\frown$ AFE wegen A

alſo auch $\frac{1}{2}$ $\frown$ CDE $>$ $\frac{1}{2}$ $\frown$ AFE (B

es iſt aber $\frac{1}{2}$ $\frown$ CDE $=$ $\angle$ y
und $\frac{1}{2}$ $\frown$ AFE $=$ $\angle$ x } dieſe Werthe in B

Alſo auch $\angle$ y $>$ $\angle$ x

w. z. e. w.

Wären aber z. B. $\angle$ y $=$ $\angle$ z angenommen worden, ſo würde ſehr leicht durch denſelben Gang bewieſen werden können, daß auch CE $=$ CA, und daß alſo auch in jedem $\triangle$, gleiche Seiten gleichen $\angle\angle$ gegenüber ſtehen, und umgekehrt.

Alles was nun im 49. §. mit Hülfe der in §. 15. unter Nro. 2. I. und Nro. 3. I. hergeleiteten Folgerung geſchloſſen wurde, kann nun auch aus dem vorhergehenden Satze ohne Schwierigkeit hergeleitet werden; auch folgt noch hieraus der nachſtehende Satz.

§. 51. Fig. 55.

Wenn man in einem gleichſchenkligen $\triangle$, aus der Spitze des den übrigen beiden nicht gleichen $\angle$s eine Gerade auf die gegenüber liegende Seite zieht, und eines von folgenden drei Stücken ſtatt findet, ſo laſſen ſich immer die beiden übrigen erweiſen.

1) Wenn der $\angle$ durch die Gerade in zwei gleiche Theile getheilt wird; oder

II) Die gegenüberſtehende Seite in zwei gleiche Theile getheilt wird; oder auch

III) Die Gerade auf der gegenüber liegenden Seite ! ſteht.

Beweis:

I. angenommen.

So iſt $\angle n = \angle o$ aus I.

AB = AC wegen des = ſchenkl. $\triangle$

AD = AD

Alſo auch $\triangle$ ADB = $\triangle$ ADC (A

und auch BD = CD

wodurch II. erwieſen.

Aus A folgt aber auch $\angle p = \angle q$.

Da nun dieſe $\angle\angle$ Neben$\angle\angle$ ſind, ſo ſind ſie rechte, und AD ! BC, wodurch auch III. erwieſen iſt.

Es wird Anfängern nicht ſchwer werden, auch I. und III. aus II., und I. und II. aus III. herzuleiten, weßhalb ich zur Erſparung des Raumes dieſe Beweiſe hier weg laſſe.

§. 52. Fig. 56.

Wenn man eine Seite eines $\triangle$s verlängert, ſo iſt der außerhalb entſtandene $\angle o$ = den beiden gegenüberliegenden innern x und y; nämlich

$$\angle o = \angle x + \angle y$$

Beweis:

Es iſt $o + z = 180°$ als Neben$\angle\angle$

und auch $x + y + z = 180°$ als alle drei $\angle\angle$ eines $\triangle$

Alſo auch $o + z = x + y + z$ }
$z = z$ } ſubtrahirt
$-$ $-$

$$o = x + y$$

w. z. e. w.

§. 53. Fig. 57.

So iſt nun auch ein $\angle o$, der innerhalb zweier Parallelen liegt, = der Summe der $\angle\angle$, welche ſeine verlängerten Schenkel mit den Parallelen außerhalb derſelben bilden.

Nämlich es iſt $\angle o = \angle m + \angle n$.

Conſtr. Verlängerung eines Schenkels CD, bis ſolcher die zweite Parallele in E ſchneidet.

Beweis:

Es iſt $\angle o = \angle r + \angle s$ nach §. 52.
Und da $\angle s = \angle n$ als Scheitel $\angle$
und $\angle r = \angle m$ als äußere und innere

So iſt auch $\angle o = \angle m + \angle n$

w. z. e. w.

Fig. 58.

Auf ähnliche Art läßt ſich auch erweiſen daß ein $\angle o$, deſſen Schenkel verlängert zwei Parallelen ſchneiden, = iſt dem über der obern Parallele entſtehenden $\angle m$, weniger dem andern $\angle n$, welcher innerhalb der untern Parallele entſteht.

Nämlich es iſt $\angle o = \angle m - \angle n$.

Beweis:

Es iſt $\angle s = \angle o + \angle q$ als äußerer

Alſo auch $s - q = o$ (A
Da nun $\angle s = \angle m$ als äußere und innere
und $\angle q = \angle n$ als Scheitel $\angle$

ſo iſt $\angle m - \angle n = \angle o$, wenn man die vorigen Werthe in A ſtellt.

w. z. e. w.

§. 54. Fig. 59.

Wenn von zwei △△ die Seiten des einen mit den Seiten des andern parallel laufen, ſo ſind die △△ ähnlich.

In dem △ ABC und abc ſey AB # ab, BC # bc, AC # ac, ſo wird auch △ ABC ähnlich (∾) abc.

Conſtr. Man verlängere AC, und ſtelle das △ abc ſo auf AD, daß A und c eine Gerade bilden.

Beweis:

∠ x = ∠ n } als äußere und innere, wegen
∠ y = ∠ m } der # laufenden Seiten.

Alſo auch ∠ o = ∠ u

Da nun alle drei ∠ des einen △s, allen drei ∠ des andern △s = ſind, ſo ſind die △△, vermöge der Erklärung §. 47. einander ähnlich (∾).

§. 55. Fig. 60.

Wenn die Seiten zweier △△ auf einander oder auf ihren Verlängerungen ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die △△ einander ähnlich.

Nämlich da DE ! AB, FD ! AC und FG ! BC, ſo iſt auch △ ABC ∾ DEF.

Conſtr. Man ziehe DG.

Beweis:

∠ x = 90°, wegen der !

Alſo auch ∠ y + ∠ n = 90°
Da nun auch ∠ y + ∠ z = 90°, wegen der !

ſo iſt auch ∠ y + ∠ n = ∠ y + ∠ z

d. i. ∠ n = ∠ z

(A.

Ferner iſt

$\angle o + \angle p + \angle q + \angle r = 360^\circ$ } als $\angle$e in 2
$= 2.\ 180$ } $\triangle\triangle$.

Da nun auch $\angle o + \angle q = 180$ wegen der $\parallel$;

ſo muß auch $\angle p + \angle r = 180$ ſeyn.

Es iſt aber auch $\angle m + \angle r = 180$ als Neben$\angle$

Alſo auch $\angle p + \angle r = \angle m + \angle r$

d. i. $\angle p = \angle m$ (B.

da nun in A und B zwei $\angle$e der $\triangle\triangle$ als $=$ bewieſen ſind, ſo muß auch $\angle s = \angle t$,

nämlich der dritte $\angle$ = dem dritten; und da alle drei $\angle$e des $\triangle$s ABC = allen drei $\angle$e des $\triangle$s DEF, ſo iſt auch $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF

w. z. e. w.

§. 56. Fig. 59.

Wenn ein $\triangle$ auf ein anderes ähnliches ſo aufgelegt wird, daß ein $\angle$ auf den ihm gleichen $\angle$ zu liegen kömmt, ſo werden die dieſen $\angle$e gegenüberliegenden Seiten mit einander parallel laufen.

Man lege $\triangle$ abc ſo auf ABC, daß $\angle u$ auf $\angle o$ zu liegen kömmt,

ſo iſt $\angle n = \angle x$ } wegen der Ähnlichkeit
und $\angle m = \angle y$ } der $\triangle\triangle$.

Alſo auch ac $=$ AC

w. z. e. w.

§. 57. Fig. 61.

In jedem Vielecke, es ſey regelmäßig oder nicht, wenn es nur keinen eingehenden $\angle$

hat, enthalten alle Vielecks-Winkel zuſammen ſo viel Mal 180, als Seiten ſind, weniger 360°.

Um dieſes zu erweiſen, nehme man innerhalb des Vielecks nach Belieben einen Punkt an, und verbinde ſolchen mit allen Eck-Punkten des Vielecks, ſo werden ſo viel △△ entſtehen, als Seiten ſind.

Beweis:

$$\text{Es iſt } \left.\begin{array}{l} a+f+g \\ b+h+i \\ c+k+l \\ d+m+n \\ e+p+o \end{array}\right\} = 5.\ 180 \text{ als } \angle \text{ in } 5\ \triangle\triangle$$

Da nun $a+b+c+d+e = 360$, als ∟ die einen ganzen Kreis ausmachen.

$$\text{Alſo auch } \left.\begin{array}{l} f+g \\ h+i \\ k+l \\ m+n \\ p+o \end{array}\right\} = 5.\ 180 - 360.$$

Da nun $f+g+h+i+k+l+m+n+p+o$ = den fünf Vielecks ∠ des Fünfecks, ſo ſind auch dieſe

$$= 5.\ 180 - 360$$

Eben ſo würde man von einem Sechseck erhalten $6.\ 180 - 360$, vom Siebeneck $7.\ 180 - 360$ u. ſ. w. Es enthalten alſo alle ∠ in einem n Ecke $(n.\ 180 - 360)^\circ$.

w. z. e. w.

Wäre nun das Vieleck regelmäßig, ſo würden die Vielecks ∠ alle einander = ſeyn, folglich ein Vielecks ∟ im regelmäßigen n Ecke $= \left(\frac{n.\ 180 - 360}{n}\right)^\circ$

Nach dieſer Formel können nun die Vielecks ∠ für

jedes regelmäßige Vieleck gefunden werden. So iſt der Vielecks ∟ im regelmäßigen (gleichſeitigen) △.

$$= \frac{3.\ 180 - 360}{3} = \frac{3.\ 180 - 2.\ 180}{3}$$

$$= \frac{180}{3} = 60^\circ$$

Im Quadrat

$$= \frac{4.\ 180 - 360}{4} = \frac{4.\ 180 - 2.\ 180}{4}$$

$$= \frac{2.\ 180}{4} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

Aber auch in jedem andern Rechteck hat jeder ∟ = 90° da die ∟∟ alle einander gleich ſind, und deßhalb dieſelbe Formel angewendet werden kann.

Im Fünfeck

$$= \frac{5.\ 180 - 360}{5} = \frac{5.\ 180 - 2.\ 180}{5}$$

$$= \frac{3.\ 180}{5} = 3.\ 36 = 108^\circ$$

und ſo weiter.

§. 58. Fig. 61.

Wenn man an einem Vielecke, welches, wie das vorige, keinen eingehenden ∟ hat, übrigens aber wie immer geſtaltet ſeyn kann, alle Seiten verlängert, ſo enthalten alle dadurch außerhalb entſtehende ∟∟ zuſammen 360°.

Beweis:

Hier iſt wie vorher

$$\mathfrak{A} \left\{ \begin{array}{l} a + f + g \\ b + h + i \\ c + k + l \\ d + m + n \\ e + o + p \end{array} \right\} = 5.\ 180^\circ$$

als ∟ in 5. △△

Aber auch

$$\mathfrak{B}\left\{\begin{matrix} t + g + h \\ s + i + k \\ r + l + m \\ q + n + o \\ u + p + f \end{matrix}\right\} = 5 \cdot 180^{\circ}$$

als ∠ in fünf Halbkreiſen.

Es ſind alſo alle ∠ aus A allen ∠ aus B gleich; da aber die ∠ $f + g + h + i + k + l + m + n + o + p$ in beiden Theilen enthalten ſind, ſo können ſie beiderſeits weggelaſſen werden, und es iſt augenſcheinlich

$$a + b + c + d + e = r + s + t + u + q$$

und da $a + b + c + d + e = 360^{\circ}$ als ∠ die einen ganzen Kreis ausmachen, ſo iſt auch

$$r + s + t + u + q = 360^{\circ}$$

w. z. e. w.

§. 59. Fig. 62.

Wenn in einem Viereck jede zwei gegenüberſtehende Seiten mit einander # laufen, ſo ſind ſie auch einander gleich.

Es ſey AB # DC und AD # BC
ſo iſt AB = DC und AD = BC

Conſtr. Die Diagonale BD.

Beweis:

BD = BD

$\angle v = \angle y$ } als Wechſel ∠
$\angle w = \angle z$ }

Alſo auch △ ABD = △ CBD

und auch AB = DC
und AD = BC

w. z. e. w.

Wenn in einem Vierecke jede gegenüber lie= gende Seiten einander = ſind, ſo laufen ſie auch mit einander #.

Es ſey AB = DC uud AD = BC
ſo iſt auch AB # DC und AD # BC

Beweis:

AB = DC }
AD = BC } a. d. E.
oder auch BD = BD

Alſo auch △ ABD = △ CBD

und auch ∟ v = ∟ y
und ∟ w = ∟ z

Da nun dieſe ∠ Wechſel∠ ſind, ſo laufen auch die Seiten mit einander #. w. z. e. w.

§. 60. Fig. 62.

Jedes Parallg. wird durch eine Diagonale in zwei vollkommen gleiche △△ zerlegt.

Denn es war in beiden Fällen des vorhergehen= den §.

△ ABD = △ CBD

§. 61. Fig. 63.

Wenn man in einem Parallgr. zwei Diago- nalen zieht, ſo theilen ſie einander ſelbſt jede in zwei vollkommen =e Theile.

Beweis:

Es iſt AF = DC, wegen der #gramme
Ferner ∟ o = ∟ k }
und ∟ n = ∟ i } als Wechſel∠

Alſo auch △ AFG = △ DCG

und auch $FG = CG$, welche $\angle\, i = \angle\, n$ gegenüber liegen.

und $AG = DG$, welche $\angle\, k = \angle\, o$ gegenüber liegen.

w. z. e. w.

Wenn man nun durch den Durchſchnittspunkt in beliebiger Richtung eine Gerade zieht, ſo theilt ſolche ſowohl das Parallgr., als auch ſich ſelbſt in zwei gleiche Theile.

Nämlich es iſt $ABEF = CBED$

und auch $BG = EG$

Beweis:

Nach vorigem Beweiſe war

$\triangle AGF = \triangle DCG$ (A

und auch $AG = DG$

Da nun noch $\angle\, m = \angle\, h$ als Wechſel $\angle$

und $\angle\, t = \angle\, q$ als Scheitel $\angle$

ſo iſt auch $\triangle ABG = \triangle EDG$ (B

Ferner noch $FG = CG$ aus vorigem Beweiſe

aber auch $\angle\, l = \angle\, p$ als Wechſel $\angle$

und $\angle\, w = \angle\, s$ als Scheitel $\angle$

Alſo auch $\triangle FEG = \triangle CBG$ (C

Wenn man nun die Theile der Gleichungen A, B und C addirt, ſo iſt

$$\triangle AFG + \triangle ABG + \triangle FEG$$
$$= \triangle DCG + \triangle EDG + \triangle CBG$$

d. i. $ABEF = CDEB$

w. z. e. w.

Es folgt aber auch aus B,

daß $BG = EG$

und eben ſo aus C
daß BG = EG

welches ebenfalls zu erweiſen war.

§. 62. Fig. 64.

Das Vorhergehende giebt Mittel an die Hand, auf einem Reißbrette, Zeichenbogen ꝛc. ſehr leicht ein Rechteck als Rand oder Einfaſſung ꝛc. aufzutragen.

Es ſey ABCD ein Reißbrett, wo es nicht darauf ankömmt, daß es vollkommen rechtwinklig gearbeitet iſt, ſo ziehe man die Diagonalen AC und DB, ſetze den Zirkel in den Durchſchnittspunkt E ein, trage gleich große Theile von E aus nach A, B, C und D auf, nämlich EH = EG = EF = EI, ſo iſt FGHI ein vollkommenes Rechteck.

B e w e i s:

Es iſt $EG = EI$ }
und $EH = EF$ } a. b. C.
Da nun $\angle o = \angle s$ als Scheitel $\angle$

ſo iſt auch $\triangle EGH = \triangle EIF$
Alſo auch $\angle w = \angle v$
und $\angle p = \angle z$
wegen der gleichſchenkligen $\triangle\triangle$ iſt aber auch
$\angle w = \angle z$
und $\angle p = \angle v$

Alſo $\angle w = \angle z = \angle p = \angle v$
Auf ähnliche Art erweiſet man auch
daß $\angle y = \angle x = \angle q = \angle m$

Alſo auch $\angle w + \angle y = \angle z + \angle x$
$= \angle p + \angle q = \angle v + \angle m$

Das iſt $\angle F = \angle G = \angle H = \angle I$

Mithin FGHI ein vollkommenes Rechteck, weil alle ∟ einander gleich ſind. w. z. e. w.

§. 63.

Ein Punkt in einer Figur, welcher ſo beſchaffen iſt, daß jede durch die Figur und dieſen Punkt gezogene Gerade in ſolchem in zwei gleiche Theile getheilt wird, wird der **Mittelpunkt der Größe** dieſer Figur genannt.

So iſt in Fig. 63. G und in Fig. 64. für FGHI, E der Mittelpunkt der Größe.

Fig. 65.

Eben ſo hat auch jedes regelmäßige und ſymmetriſche Vieleck einen Mittelpunkt der Größe C; denn auch in dieſen findet obige Bedingung ſtatt, welches aber bei den regelmäßigen und nicht ſymmetriſchen Vielecken nicht der Fall iſt, wie man ſich leicht an den Figuren ſelbſt überzeugen kann.

§. 64. Fig. 66.

Zwei Parallelogramme, welche dieſelbe Grundlinie und einerlei Höhe haben, (oder, welches daſſelbe iſt, zwiſchen zwei Parallelen ſtehen) ſind an Flächeninhalt einander gleich.

Nämlich wenn AD ⫲ EF die gemeinſchaftliche Grundlinie, ſo iſt auch ABFE = CDFE.

Beweis:

Denn es iſt AB = EF } wegen der Parallgr.
CD = EF

Alſo auch AB = CD

Mithin auch AB + BC = BC + CD
d. i. AC = BD.

Da nun auch AE = BF }
und CE = DF } wegen der Parallgr.

ſo iſt △ ACE = △ BDF

u. △ ACE — △ BCG = △ BDF — △ BCG

d. i. ABGE = CDFG

Ferner ABGE + EFG = CDFG + EFG

Alſo endlich ABFE = CDFE

w. z. e. w.

§. 65. Fig. 66.

Aber auch Parallelogramme von gleichen Grundlinien (wenn es auch nicht eine und dieſelbe iſt) ſind einander an Flächeninhalt gleich, wenn ſie gleiche Höhe haben, oder zwiſchen zwei Parallelen ſtehen.

Nämlich wenn AD ⧣ EI und EF = HI, ſo iſt auch ABFE = CDIH.

Conſtr. Man verbinde E mit C und D mit F.

Beweis:

Denn es iſt ABFE = CDFE }
aber auch CDHI = CDFE } nach vorig. Beweis

Alſo auch ABFE = CDHI

w. z. e. w.

§. 66. Fig. 66.

Was in vorhergehenden beiden §. §. von den Parallelogrammen geſagt worden iſt, gilt ebenfalls auch von den △ △.

Nämlich: Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe, oder von derſelben Grundlinie,

zwiſchen zwei Parallelen, ſind einander an Flächeninhalte gleich.

Nämlich wenn AD # EF, und EF die gemeinſchaftliche Grundlinie, ſo iſt auch △ AEF = △ DEF.

Denn Dreiecke ſind nichts anders, als die Hälften von Parallelogrammen; da nun die Hälften gleich ſeyn müſſen, wenn die Ganzen gleich ſind, ſo iſt auch dadurch der obige Satz erwieſen.

Nämlich es war

ABEF = CDEF

alſo auch $\frac{1}{2}$ ABEF = $\frac{1}{2}$ CDEF

Nun iſt aber $\frac{1}{2}$ ABEF = △ AEF
und $\frac{1}{2}$ CDEF = △ DEF

Alſo auch △ AEF = △ DEF

w. z. e. w.

§. 67. Fig. 66.

Auf ähnliche Art wird nun auch dargethan werden können: daß Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen einander gleich ſind, wenn auch ihre Grundlinie nicht eine und dieſelbe iſt.

Beweis:

Denn es iſt △ AEF = △ DEF aus vorig. Beweis
und nun △ DEF = △ CDE als Hälften eines # gr.
Ferner △ CDE = △ CDI vermöge vorigen §.
und endlich △ CDI = △ CHI als Hälften eines # gr.

Alſo auch △ AEF = △ CHI

w. z. e. w.

§. 68. Fig. 67.

Parallelogrammen von einerlei Höhe und verſchiedenen Grundlinien verhalten ſich wie ihre Grundlinien.

Nämlich wenn AE ‡ FK (das iſt, die Parallelogramme haben einerlei Höhe), ſo iſt auch ABGF : CEKH = FG : HK.

Conſtr. Man übertrage die Grundlinie des kleinern Parallelgr. in das größere, hier FG in HK, ſo daß HI = FG werde; nun theile man die Grundlinie HK in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; jedoch ſo, daß ein Theilungspunkt in I falle, und ziehe aus allen dieſen Theilungspunkten Parallelen zu CH.

Beweis:

Vermöge der Conſtruktion ſind alle die kleinen Parallelogrammen einander an Flächeninhalt gleich; denn ſie haben alle gleiche Grundlinien und ſtehen zwiſchen zwei Parallelen. So iſt nun

CDIH = 5 . CLMH
und CEKH = 12 . CLMH

Alſo auch CDIH : CEKH =
5 . CLMH : 12 . CLMH

d. i. CDIH : CEKH = 5 . : 12.

Nun iſt aber vermöge der Conſtruktion auch
HI = 5.
und HK = 12.

Alſo auch CDIH : CEKH = HI : HK

Da nun CDIH = ABFG nach §. 65.
und HI = FG a. d. C.

ſo iſt auch ABFG : CEKH = FG : HK

w. z. e. w.

Daſſelbe gilt nun auch von den Dreiecken, da immer die Hälften ſich eben ſo gegen einander verhalten, wie die Ganzen.

Es verhalten ſich alſo Dreiecke und Parallelogrammen von einerlei Höhe wie ihre Grundlinien, und umgekehrt; △△ und Parallelogrammen von einerlei Grundlinie wie ihre Höhen.

Um das Letztere zu erweiſen, darf man nur die Höhe des kleinern Parallelogr. in das größere eintragen, und übrigens ganz wie in voriger Conſtruktion verfahren; welches ich jedoch dem fleißigen Schüler zur eigenen Übung überlaſſen will.

§. 69. Fig. 68.

Daß Dreiecke von gleicher Höhe ſich wie ihre Grundlinien verhalten, läßt ſich auch folgendermaßen erweiſen.

Man denke ſich die Höhe AB der beiden △△ ADE und AEF in eine unendliche Anzahl kleiner Theile zerlegt, welches mit Ausnahme der Spitze, welche ein Dreieck iſt, lauter Trapezien ſeyn werden: ſo iſt blos die Summe dieſer Trapezien zu beſtimmen, welches ſich ſehr leicht thun läßt.

Wenn man die Theilungslinien wirklich zieht, und von den zwei Punkten, wo jede in die Seiten AD und AE eintrifft, Senkrechte auf die nächſtfolgende herab fället: ſo wird man leicht bemerken, daß dieſe Trapezien in einer arithmetiſchen Reihe des erſten Ranges wachſen; nämlich daß ſie immer gleiche Differenzen haben, nämlich die zu beiden Seiten entſtandenen kleinen △△. Nun iſt die Summe einer ſolchen Reihe bekanntlich $(a + t)\frac{n}{2}$, nämlich dem erſten + dem letzten Gliede, multiplizirt mit der halben Anzahl der Glieder. Es iſt aber hier das erſte Glied = o nämlich die Spitze A; da bei unend-

lich kleiner Breite der # das an der Spitze entſtandene kleine △ in einen Punkt übergehen würde. Und wenn wir den Parallelogrammen eine unendlich kleine Breite zueignen, daß ſie als bloße Parallelen anzuſehen ſind, ſo iſt die Grundlinie DE das letzte Glied der erwähnten Reihe, und AB, nämlich die Höhe, die Anzahl der Glieder, und $\frac{1}{2}$ AB die halbe Anzahl derſelben. So iſt nun der Flächeninhalt des △ ADE = der Summe aller Parallelen = (o + DE) $\frac{1}{2}$ AB = DE . $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ AB . DE. Wenn man nun mit dem △ AEF dieſelbe Conſtruktion vornähme, ſo würde man finden, daß der Flächeninhalt dieſes △s = $\frac{1}{2}$ AB . EF wäre. So iſt nun augenſcheinlich

△ ADE : △ AEF = $\frac{1}{2}$ AB . DE : $\frac{1}{2}$ AB . EF

und ADE : AEF = DE : EF

nämlich: die △△ von gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundlinien; w. z. e. w.

Fig. 69.

Würde man auch mit den △△ ABC und DEF eine ähnliche Operation vornehmen, und es wäre

AC = DF,

nämlich ſie hätten gleiche Grundlinien, ſo iſt

△ ABC = $\frac{1}{2}$ BH. AC

und △ DEF = $\frac{1}{2}$ DF . EG

ſo iſt ABC : DEF = $\frac{1}{2}$ AC . BH : $\frac{1}{2}$ DF . EG

und da AC = DF angenommen

ſo iſt auch

ABC : DEF = $\frac{1}{2}$ AC . BH : $\frac{1}{2}$ AC . EG

d. i. ABC : DEF = BH : EG

nämlich: △△ von einerlei Grundlinie verhalten ſich wie ihre Höhen; w. z. e. w.

§. 70. Fig. 70.

Um jedes regelmäßige Vieleck kann ein Kreis beſchrieben werden.

Conſtr. Man theile zwei Vielecks=Winkel, jeden in zwei gleiche Theile, und verlängere die Theilungslinien; wo ſie ſich ſchneiden, iſt der Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes.

Beweis:

Da die Vielecks $\angle\angle$ im regelmäßigen Vielecke alle einander gleich ſind, ſo ſind auch ihre Hälften gleich, und deßhalb iſt $\angle y = \angle z$.

Da aber in jedem $\triangle$ gleichen $\angle\angle$ gleiche Seiten entgegen ſtehen, ſo iſt auch AF = BF.

Verfährt man auf dieſelbe Art mit dem $\triangle$ BFC, ſo findet man, daß auch

$\angle u = \angle o$,

und nun auch BF = CF

es war aber AF = BF

Alſo auch AF = BF = CF

und eben ſo findet man nun auch, daß DF und EF den gleichnahmigen Seiten der erſten $\triangle\triangle$ = ſind; es iſt alſo AF = BF = CF = DF = EF.

Da nun die Punkte A, B, C, D und E alle von F = weit entfernt liegen, ſo muß auch ein Kreis aus F, mit dem Halbmeſſer AF gezogen, durch die Punkte A, B, C, D und E gehen; w. z. e. w.

Es folgt hieraus und iſt aus der Figur erſichtlich, daß ein regelmäßiges Vieleck in ſo viel gleiche $\triangle\triangle$ zerlegt wird, als Seiten ſind, wenn man auf die erwähnte Art den Mittelpunkt des umzuſchreibenden Kreiſes ſucht, und ſolchen mit dem Scheitel jedes Polygon=Winkels verbindet.

Denn es iſt

AB = BC = CD = DE = EA, wegen des regelmä=

ßigen Vieleckes; und aus gleichem Grunde $\angle\ y = \angle\ z = \angle\ u = \angle\ o = \angle\ p = \angle\ q = \angle\ r = \angle\ s = \angle\ t = \angle\ x$. Alſo auch

$$\triangle\ AFB = BFC = CFD = DFE = EFA.$$

w. z. e. w.

§. 71. Fig. 70.

Der Mittelpunkts$\angle$ eines regelmäßigen nEcks iſt $= \frac{360°}{n}$

Denn da aus vorigem Beweiſe alle $\triangle\triangle$ einander gleich waren, ſo ſind es auch die $\angle\angle$, welche um den Mittelpunkt F herum liegen; es iſt alſo hier im Fünfeck der Kreis in fünf gleiche $\angle\angle$ getheilt, und wird eben ſo beim Sechseck in ſechs, beim Siebeneck in ſieben ꝛc. ꝛc. und beim n Eck in n gleiche Winkel getheilt ſeyn, und deßhalb jeder $\angle$ $(360 : n)°$ enthalten.

Man kann deßhalb den Mittelpunkts- oder Centri-Winkel eines regelmäßigen Vielecks leicht finden, wenn man mit der Anzahl der Seiten in 360° dividirt.

Da nun die Seiten des Vielecks die Sehnen der $\frown$ ſind, welche den Vielecks$\angle$ meſſen, ſo iſt jede Seite des n Ecks die Sehne eines Bogens von $\frac{360°}{n}$

§. 72. Fig. 71.

Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks iſt dem Halbmeſſer gleich.

Beweis:

$$\angle\ n = \frac{360}{6} = 60°$$

Da nun $\triangle$ ABC nach vorigen Beweiſen gleichſchenkig iſt, ſo iſt auch $\angle\ x = \angle\ z$.

Es iſt aber $x + z = 180 - 60 = 120$; und da $x = z$, alſo auch $x = z = \frac{120}{2} = 60$. Da nun das △ drei vollkommen gleiche ∠ hat, ſo ſind auch ſeine Seiten gleich, und deßhalb $AC = AB = BC$; w. z. e. w.

§. 73. Fig. 72.

In ein jedes regelmäßige Vieleck kann ein Kreis eingeſchrieben werden, welchen alle Vielecks-Seiten als Tangenten berühren.

Conſtr. Man halbire zwei Seiten des Vielecks, errichte darauf Senkrechte, ſo iſt der Mittelpunkt des geſuchten Kreiſes da, wo ſich die Senkrechten ſchneiden, und dieſe ſelbſt der Halbmeſſer des Kreiſes.

Beweis:

Denn es iſt ∟ v = ∟ x als rechte, wegen der ⊥.
$HB = IB$ a. d. C.
$GB = GB$

Alſo auch △ HGB = △ IGB als recht ∟ △, wo eine Kathete und die Hypoth. =.

Daher auch $HG = IG$

Auf dieſelbe Art läßt ſich nun weiter erweiſen, daß $IG = KG$, $KG = LG$ ꝛc.

Da nun die Punkte H, I, K, L, M, N alle gleich weit von G entfernt ſind, ſo iſt es erſichtlich, daß ein aus G geſchlagener Kreis durch alle die erwähnten Punkte hindurch geht, und G der Mittelpunkt dieſes Kreiſes iſt. Da nun übrigens die Linien HG, IG, KG ꝛc. alle vermöge der Conſtruktion ⊥ auf den Seiten des Vielecks ſtehen, ſo müſſen dieſe die Tangenten werden, weil jenes Halbmeſſer ſind, indem nur die Tangente auf dem Endpunkte eines Halbmeſſers ⊥ ſteht; w. z. e. w.

§. 74. Fig. 73.

In ein jedes △, auch wenn es unregelmäßig iſt, läßt ſich ein Kreis einſchreiben, welchen alle Seiten als Tangenten berühren.

Conſtr. Man halbire zwei ∠ des △s, ſo iſt der Mittelpunkt des Kreiſes da, wo ſich dieſe Theilungslinien ſchneiden; läßt man nun aus dieſem Durchſchnittspunkte !! auf die Seiten fallen, ſo ſind dieſe die Radien des geſuchten Kreiſes.

Beweis:

Denn es iſt ∠ x = ∠ y v. d. C.
∠ m = ∠ n als rechte

Alſo auch ∠ o = ∠ q
Da nun noch EC = EC

ſo iſt auch △ FCE = △ DCE

und auch FE = DE

Eben ſo wird nun auch erwieſen, daß GE = DE = FE iſt; alſo muß ein aus E mit GE = DE = FE als Radius geſchlagener Kreis durch die drei Punkte F, D und G gehen, und wegen der !! auch die Seiten des Kreiſes denſelben als Tangenten berühren.

§. 75. Fig. 70.

Wenn in einem Kreiſe ein Vieleck verzeichnet werden ſoll; ſo ſuche man den Mittelpunkts ∠ dieſes Vielecks durch den Ausdruck $\frac{360}{n}$, und trage ſolchen an dem Mittelpunkte auf, verlängere deſſen Schenkel, und da, wo ſie den Kreis ſchneiden, an Fig. 70. z. B. in A und B, ziehe man die Sehne AB, und trage ſolche ſo oft als es thunlich iſt, in dem Kreiſe herum und verbinde die gefundenen Punkte.

So richtig auch dieſes Verfahren in mathematiſcher und theoretiſcher Hinſicht iſt, ſo wenig iſt es in der Ausführung anwendbar, da der Mittelpunkts-Winkel nicht gut anders als mit dem Transporteur aufzutragen iſt; und wie unſicher dieſes Auftragen iſt, iſt ſchon früher erwähnt worden. Man thut daher am beſten, wenn man durch Verſuche, mittelſt des ſchon genannten Haarzirkels, den Kreis in die verlangte Anzahl Theile eintheilt.

Von den Proportional-Linien.

§. 76. Fig. 74.

Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele zieht, ſo werden dadurch die übrigen beiden Seiten in proportionale Theile geſchnitten.

Nämlich wenn CD ‡ AB, ſo iſt auch

I) EC : EA = ED : EB.

II) AC : EC = DB : DE.

Conſtr. Die Diagonalen AD und BC.

Beweis:

Denn es iſt △ ACD = △ BCD aus §. 66.

Da nun △ CDE = △ CDE

ſo iſt auch ACD + CDE

= BCD + CDE

d. i. ADE = BCE (A

Nun iſt CDE : ADE = EC : EA aus §. 69. (B

und eben ſo CDE : BCE = ED : EB deßgleichen

und nun CDE : ADE = ED : EB wegen A. (C

und aus B u. C, EC : EA = ED : EB (D

wodurch I. erwieſen.

Aus D wird nun ferner

$$EA : EC = EB : ED$$

und $EA - EC : EC$

$$= EB - ED : ED$$

d. i. $AC : EC = DB : ED$

wodurch auch II. erwieſen.

§. 77. Fig. 74.

Umgekehrt: wenn in einem $\triangle$ zwei Seiten durch eine Gerade in proportionale Theile geſchnitten werden, ſo läuft dieſe Gerade mit der dritten Seite parallel.

Nämlich wenn $EC : EA = ED : EB$
ſo iſt auch $CD \# AB$.

Conſtr. Man ziehe die Gerade CF willkührlich.

Beweis:

Wäre CD nicht $\#$ AB, ſo könnte durch C eine andere Parallele, z. B. CF gezogen werden, wo dann nach vorigem §.

A) $EC : EA = EF : EB$

ſtatt finden müßte; da nun

B) $EC : EA = ED : EB$

angenommen wurde, ſo wäre aus A und B

$$EF : ED = EB : EB$$

eine richtige Proportion; da nun aber

$$EB = EB$$

ſo müßte auch $EF = ED$ ſeyn, welches nicht ſeyn kann, weil $ED > EF$ iſt; w. z. e. w.

§. 78. Fig. 74.

Bei ähnlichen $\triangle\triangle$ ſtehen die Seiten, welche gleichen $\angle$ gegenüber ſtehen (gleichnahmigen Seiten), in Proportion.

Conſtr. Man übertrage das kleinere der ähnlichen △△ in das größere, ſo daß ein gleicher ∟ auf ſeinem gleichen zu liegen kömmt.

Beweis:

So iſt wegen dieſer Conſtruktion und des §. 56.

∟ x = ∟ z }
und ∟ y = ∟ u } wegen Ähnlichkeit der △△.

Alſo auch CD ⧺ AB

Nun wurde in §. 76. erwieſen, daß, wenn dieſes ſtatt fände, auch

EC : EA = ED : EB ſey.

Nun liegt aber

EC gegenüber ∟ y
EA „ „ ∟ u
ED „ „ ∟ x
und EB „ „ ∟ z

wodurch das Geſagte erwieſen.

§. 79.

Wenn die Seiten eines △s mit den Seiten eines andern △s in Proportion ſtehen, ſo ſind die △△ ähnlich.

Nämlich wenn ec : EA = cd : AB
und ec : EA = ed : EB
ſo iſt auch △ ecd ∾ AEB.

Conſtr. Man übertrage die Seite ec des kleineren △s in das größere, ſo daß EC = ec werde, und ziehe durch C zu AB die ⧺ CD.

Beweis:

So iſt EA : EC = EB : ED nach §. 76.
und auch EA : ec = EB : ed verm. d. Vorausſetzung

Woraus EC : ec = ED : ed
und da EC = ec a. d. E.

ſo iſt auch ED = ed

Ferner iſt vermöge der Vorausſetzung auch
EA : ec = AB : cd (A

Da aber durch die # DC auch die △ AEB und CED einander ∾, ſo iſt auch
EA : EC = AB : CD (B

Alſo auch aus A und B
EC : ec = CD : cd
Da nun EC = ec v. d. E.

ſo iſt auch CD = cd

Es iſt alſo das △ ecd = ECD, da alle drei Seiten einander gleich ſind. Da nun wegen der # CD
△ AEB ∾ △ ECD

ſo iſt auch △ AEB ∾ △ ecd

w. z. e. w.

§. 80. Fig. 74.

Wenn in zwei △△, die einen gleichen ∟ haben, die dieſen ∟ einſchließenden Seiten in Proportion ſtehen, ſo ſind die △△ einander ähnlich.

Nämlich wenn ∟ m = ∟ n
und EA : ec = EB : ed
ſo iſt auch △ ecd ∾ AEB

Beweis:

Um dieſes einzuſehen, lege man das kleine △ dergeſtalt auf das große, daß der ∟ m auf ſeinen gleichen ∟ n, und ec auf EA, und ed auf EB zu liegen kom-

me. Wenn nun ec bis C und ed bis D reicht, und vorher EA : ec = EB : ed vermöge der Vorausſetzung ſtatt fand, ſo muß auch jetzt, da

ec = EC }
und ed = EB } vermöge der Conſtruktion iſt

EA : EC = EB : ED ſtatt haben.

Da aber dieſes, vermöge §. 76. nur ſtatt haben kann, wenn CD # AB iſt,
ſo muß dieſes auch jetzt der Fall ſeyn, weßhalb nun

$\angle x = \angle z$
und $\angle y = \angle y$

Folglich $\triangle AEB \sim \triangle CED$
und auch $\triangle AEB \sim \triangle ced$

w. z. e. w.

§. 81. Fig. 75.

Wenn man einen $\angle$ eines $\triangle$ in zwei gleiche Theile theilt und die Theilungslinie verlängert, bis ſie die gegenüberliegende Seite ſchneidet: ſo verhalten ſich die einſchließenden Seiten des $\angle$s wie die auf der gegenüberliegenden Seite entſtandenen Abſchnitte.

Nämlich wenn $\angle x = \angle y$
ſo iſt auch AC : CB = AD : DB

Conſtr. Aus dem Durchſchnittspunkte D fälle man auf die Seiten AC und BC ſenkrechte Linien.

Beweis:

Es iſt $\angle x = \angle y$ a. d. E.
$\angle n = \angle o$ als rechte

alſo auch $\angle z = \angle u$

übrigens noch CD = CD

und auch △ ECD = △ FCD
weſshalb DE = DF

Da nun dieſe Linien, nämlich DF und DE die Höhen der △△ ACD und BCD ſind, ſo iſt, wenn wir AC und BC als Grundlinien derſelben betrachten,

ACD : BCD = AC : BC (A

Nimmt man aber AD und BD als Grundlinien dieſer △△ an, ſo iſt auch ACD : BCD = AD : BD (B Aus A und B wird nun

AC : BC = AD : BD

w. z. e. w.

Dieſer Satz kann jedoch auch auf folgende Art erwieſen werden.

Fig. 75.

Conſtr. Man verlängere die eine Seite, welche den ∟ einſchlieſst, und ziehe aus dem Endpunkte der andern zu der gezogenen Theilungslinie eine Parallele.

Beweis:

So iſt ∟ y = ∟ p, wegen der #

und auch BC : CG = BD : DA nach §. 76.

Es iſt aber auch

∟ (x+y) = ∟ q + ∟ p als äuſserer am △

Da nun ∟ y = ∟ p

ſo iſt auch ∟ x = ∟ q (was noch überdies als Wechſel ∟ der Fall iſt.

und da x = y a. d. E

Alſo auch p = q

und deſshalb das △ ACG = ſchenklig, und AC = CG. Dieſen Werth in die obige Proportion gibt

BC : AC = BD : AD

wie oben.

§. 82. Fig. 75.

Wenn man die Seiten EH und EB eines Parallgr. verlängert, und durch den Scheitel des ∟s A eine Gerade in beliebiger Richtung zieht, bis ſolche die beiden verlängerten Seiten in C und D ſchneidet; ſodann das zu dem entſtandenen △ gehörige Parallgr. vollendet, und noch die übrigen beiden Seiten verlängert, bis ſolche die Seiten des großen Parallgr. ſchneiden: ſo iſt das neue entſtandene kleinere Parallelogr. dem gegebenen gleich.

Nämlich es iſt ABEH = AIFG.

Conſtr. Liegt in dem Satze ſelbſt.

Beweis:

Es iſt △ CED = △ CDF, weil eine Diagonale ein ⧣ gr. in zwei gleiche Theile theilt.

d. i. BEHA + AHD + ABC
= AIFG + ACI + ADG

Nun iſt aber △ ABC = △ ACI aus gleichem Grunde
und △ AHD = △ ADG eben ſo

Alſo auch BEHA = AGIF

w. z. e. w.

§. 83. Fig. 77.

Wenn man in einem rechtwinkligen △ aus der Spitze des rechten ∟s auf die Hypothenuſe eine ⊥ fället, ſo wird dadurch das △ in zwei ähnliche △△ zerlegt, welche auch zugleich dem gegebenen △ ähnlich ſind.

Beweis:

Im △ ABC und ABD iſt
∟ (t + z) = ∟ m als rechte
und auch ∟ x = ∟ x in zwei △△

alſo auch ∟ t = ∟ y

und deßhalb △ ABC ∾ △ ABD (A

w. z. e. w.

Ferner iſt in △ ABC und BCD
∟ (t + z) = ∟ n als rechte
und ∟ y = ∟ y

Alſo auch ∟ z = ∟ x
und deßhalb △ ABC ∾ △ BCD

und vermöge A auch △ ABD ∾ BCD

w. z. e. w.

§. 84. Fig. 77.

In jedem rechtwinkligen △ iſt das Quadrat der Hypothenuſe = den Quadraten der beiden Katheten.

Nämlich es iſt $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Conſtr. Die Senkrechte BD; und es ſey $AB = c$, $BC = b$, $AC = a$ und $AD = x$, ſo iſt $DC = a - x$.

Beweis:

So iſt nun $x : c = c : a$. (A

Nämlich da die △△ ähnlich ſind, ſo verhält ſich die Kathete x des △s ABD zu ihrer Hypothenuſe c, wie die Kathete c des △s ABC zu ihrer Hypothenuſe a.

Ferner iſt

$$a - x : b = b : a$$ (B

d. i. die Kathete $a-x$ zu ihrer Hypothenuſe b, wie die Kathete b zu ihrer Hypothenuſe a.

Aus A und B die Produkte der mittlern und äußern Glieder giebt

$$\left.\begin{array}{ll}\text{aus A,} & ax = c^2 \\ \text{aus B,} & a^2 - ax = b^2\end{array}\right\}\text{ addirt}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

und da $a = AC$, $b = BC$ und $c = AB$, ſo iſt auch

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

w. z. e. w.

Der eben bewieſene Satz iſt unter dem Namen des Pythagoräiſchen Lehrſatzes, von ſeinem Erfinder dem Pythagoras, bekannt; auch benennt man ihn gewöhnlich, ſeines ungemein großen Nutzens halber, mit dem Namen Magister matheseos.

Dieſer Satz kann auf mehrere Arten erwieſen werden, wovon die eben gezeigte die kürzeſte, aber nicht die gewöhnlichſte iſt. Für Anfänger iſt dieſer Beweis den wenigſten Irrungen unterworfen. Am gewöhnlichſten iſt der im folgenden §. angeführte Beweis, und ſpäter ſoll noch eine dritte Art gezeigt werden.

§. 85. Fig. 78.

Hier iſt alſo nach dem vorhergehenden Satze darzuthun, daß $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Conſtr. Man errichte den Seiten des △s die Quadrate AEFC, BGHC, ABIK, laſſe aus dem rechten ∟ B die ! herab auf EF, und ziehe BH, BF und LF.

Beweis:

Da AG ⧺ CH

ſo iſt auch △ BHC = △ AHC

(A

Ferner iſt $\llcorner m = \llcorner n$ als rechte
und $\llcorner o = \llcorner o$

Alſo auch $\llcorner m + \llcorner o = \llcorner n + \llcorner o$
Da nun $HC = BC$
und $AC = FC$

ſo iſt auch $\triangle AHC = \triangle BFC$ (B

und nun $\triangle BHC = \triangle BFC$ aus A und B (C

Nun iſt auch $\triangle BFC = \triangle LFC$, (D
weil $BD \# CF$

Alſo auch $\triangle BHC = \triangle LFC$ aus C und D

Betrachten wir nun daß
$\triangle BHC = \frac{1}{2} BCHG$
und $\triangle LFC = \frac{1}{2} LCFD$

ſo iſt auch $BCHG = LCFD$ (E

Auf dieſelbe Art läßt ſich nun auch erweiſen, wenn man LE, BE, KC und KB zieht, daß
$ABIK = ALDE$ (F

Alſo nun $BCHG + ABIK$
$= LCFD + ALDE$ Summa v. E u. F (G

Da nun $LCFD + ALDE = ACFE$

ſo iſt auch $BCHG + ABIK = ACFE$ (H

Nun iſt aber $BCHG = BC^2$
$ABIK = AB^2$
und $ACFE = AC^2$

Alſo in H) $AC^2 = BC^2 + AB^2$

w. z. e. w.

§. 86. Fig. 79.

Es läßt ſich nun auch umgekehrt erweiſen, daß, wenn in einem △ das □ (Quadrat) einer Seite = den □□ der beiden übrigen Seiten iſt, das △ rechtwinklig iſt. Nämlich wenn

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 \qquad (A$$

ſo iſt auch ∟ o = 90°.

Conſtr. Man errichte in D eine ⊥ DC und mache DC = DB und ziehe AC.

Beweis:

So iſt $AC^2 = AD^2 + DC^2$ aus vorigem §. (B

Da nun DC = DB a. d. C.

ſo iſt in B, $AC^2 = AD^2 + DB^2$

A aber $AB^2 = AD^2 + DB^2$

Alſo auch $AC^2 = AB^2$

und AC = AB

Da nun AD = AD

und DC = DB a. d. C.

Alſo auch △ ADC = △ ABD

und auch ∟ n = ∟ o

welches nun als gleiche Neben ∟∟ rechte ſind, folglich auch

∟ o = ∟ 90°.

w. z. e. w.

§. 87.

Aus der in §. 84. gefundenen Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2$$

laſſen ſich nun, ſowohl für die Hypothenuſe als beide Katheten eines rechtwinkligen △s, allgemeine Formeln finden. Nämlich es iſt

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{(A}$$

oder die Hypothenuſe iſt gleich der Quadrat-Wurzel aus der Summe der Quadrate beider Katheten.

Eben ſo folgt aus A

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \text{(B}$$

$$\text{und } c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{(C}$$

oder jede Kathete iſt gleich der Quadrat-Wurzel aus dem Quadrat der Hypothenuſe, wenn vorher das Quadrat der andern Kathete abgezogen worden iſt.

Wäre nun in A, $b = 3$ und $c = 4$, ſo iſt

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Es ſchließen daher die Seiten 3, 4 und 5 ein rechtwinkliges △ ein.

Aber nicht allein dieſe Zahlen, ſondern auch alle übrigen, die ſich wie 3, 4 und 5 zu einander verhalten, als $2 . 3, 2 . 4, 2 . 5 = 6, 8, 10.$

Denn es iſt auch $36 + 64 = 100$,

eben ſo $3 . 3, 3 . 4, 3 . 5 = 9, 12, 15$

da wieder $81 + 144 = 225$,

u. ſ. w.

§. 88.

Aber nicht allein dieſe, ſondern noch eine Menge anderer Zahlen ſchließen rechtwinklige △△ ein, wenn ſie gleich nicht in dem Verhältniſſe 3, 4 und 5 zu einander ſtehen.

Dieſe Zahlen laſſen ſich durch einen algebraiſchen Kunſtgriff finden.

Man ſuche zwei Quadrate, die zuſammen addirt wieder ein Quadrat geben.

So iſt z. B.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{A)} & 4x^2y^2 = (2xy)^2 \text{ und} \\ \text{B)} & x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 \end{array}\right\} \text{addirt}$$

$$\text{C)}\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

Wir haben alſo hier zwei Quadrate, A und B, deren Summe das Quadrat C gibt.

Man könnte alſo auch ſtatt

$a^2 = b^2 + c^2$ ſagen

$$(x^2 + y^2)^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2$$

und es wäre ſodann

$x^2 + y^2$ die Hypothenuſe, und

$\left.\begin{array}{l} 2xy \text{ und} \\ x^2 - y^2 \end{array}\right\}$ die beiden Katheten eines rechtwinkligen △s; und man kann alle die Zahlen, welche ein rechtwinkliges △ einſchließen, durch dieſe Ausdrücke finden.

Man nehme $y = 1$ und $x = 2$, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{rl} & x^2 + y^2 = 4 + 1 = 5 \\ \text{und} & 2xy = 2 . 2 . 1 = 4 \\ \text{und} & x^2 - y^2 = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \text{wie oben.}$$

Man kann aber auch die Zahlen oder Werthe für x und y willkührlich annehmen, und wird immer ſolche Zahlen finden, welche die erforderliche Eigenſchaft haben.

Es ſey z. B. $x = 5$, $y = 4$

$$\begin{array}{rl} \text{ſo iſt} & x^2 + y^2 = 25 + 16 = 41 \\ & 2xy = 2 . 4 . 5 = 40 \\ \text{und} & x^2 - y^2 = 25 - 16 = 9 \end{array}$$

ſo muß alſo

$(40)^2 + (9)^2 = (41)^2$ nämlich

$1600 + 81 = 1681.$

Auf dieſe Art kann man ſich ganze Tafeln entwerfen, welche lauter ſolche Zahlen, wie die vorher gezeigten, enthalten.

Nimmt man $x = 4$, $y = 1$, ſo erhält man die

Zahlen 17, 8, 15; x = 4, y = 3 geben 25, 24, 7; ſolche Werthe für x und y ſind noch 5, 2; 5, 4; 6, 1; 6, 5; 7, 2; 7, 4; 7, 6; 8, 1; 8, 3; 8, 5; 8, 7; 9, 2; 9, 4; 9, 6; 9, 8 ꝛc. ꝛc.

Es können aber auch alle dieſe Zahlen durch die unbeſtimmte Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gefunden werden, wie ich im dritten Bande dieſes Lehrbuches, Pag. 70. Aufgabe 10, gezeigt habe.

§. 39.

In dem vorhergehenden §. war von lauter rationalen Zahlen die Rede; ſind aber dieſe nicht unbedingt erforderlich, ſo ſind die Gleichungen A, B und C des §. 86. hinlänglich, um zu gegebenen oder willkührlich angenommenen Größen die dritte zu finden.

Fig. 80.

Man kann aber auch durch Verzeichnung zu zwei Seiten eines rechtwinkligen △s die dritte finden.

Sind beide Katheten gegeben, ſo ſtelle man ſie unter einem rechten ∟ zuſammen, oder verbinde ihre Endpunkte B und C, ſo iſt BC die geſuchte Hypothenuſe.

Iſt die Hypothenuſe BC und eine Kathete AB gegeben, ſo errichte man an AB einen rechten Winkel, und verlängere ſeinen andern Schenkel unbeſtimmt, z. B. AD, nehme nun die Länge der Hypothenuſe BC in den Zirkel, ſetze ihn in B ein, und ſchneide AD hier in C, ſo iſt AC die geſuchte Kathete.

§. 90. Fig. 81.

Wenn in einem Kreiſe zwei Sehnen AE und DB ſich ſchneiden, ſo iſt das Produkt aus den Abſchnitten der einen = dem Produkte aus den Abſchnitten der andern.

Nämlich es iſt AC . CE = DC . CB.

Conſtr. Man ziehe AB und DE.

Beweis:

So iſt $\llcorner x = \llcorner y$ (A

$\llcorner n = \frac{1}{2} AD$ } als ∠ am Umkreiſe
und auch $\llcorner o = \frac{1}{2} AD$

alſo auch $\llcorner n = \llcorner o$ (B

u. wegen A u. B $\llcorner u = \llcorner m$, oder wie n und o.

Folglich $\triangle ABC \sim \triangle DEC$
und deßhalb $AC : BC = DC : CE$
woraus $AC . CE = BC . DC$

w. z. e. w.

§. 91. Fig. 82.

Wenn man aus einem Punkte A zu einem Umkreiſe zwei Sekanten AB und AE zieht, ſo ſind die Produkte aus den ganzen Sekanten mit ihren Abſchnitten außerhalb des Kreiſes einander gleich; oder die Sekanten ſtehen mit ihren Abſchnitten außerhalb der Kreiſe in verkehrtem Verhältniſſe.

Nämlich es iſt AC . AB = AD . AE
und AC : AD = AE : AB.

Conſtr. Man ziehe DC und BE.

Beweis:

Es iſt $\llcorner n = \frac{1}{2} DC + \frac{1}{2} DE$, ∟ von Sehne und Sekante.

und $\llcorner m = \frac{1}{2} EDC$
d. i. $\llcorner m = \frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} DC$

Alſo $\llcorner m = \llcorner n$

Da nun $\angle x = \angle x$

ſo iſt auch $\angle r = \angle s$

und deßhalb $\triangle ABE \sim \triangle ADC$

woraus $AC : AD = AE : AB$

und $AC \cdot AB = AD \cdot AE$

w. z. e. w.

§. 92. Fig. 83.

Wenn man zu einem Kreiſe aus einem und demſelben Punkte eine Tangente und eine Sekante zieht, ſo iſt die Tangente die mittlere Proportional-Linie zwiſchen der Sekante und ihrem Abſchnitte außerhalb des Kreiſes.

Nämlich es iſt $AC : AB = AB : AD$.

Conſtr. Man ziehe BC und BD.

Beweis:

So iſt $\angle x = \frac{1}{2}$ BC als $\angle$ am Umkreiſe.

$\angle o = \frac{1}{2}$ BC, $\angle$ von Sehne und Tang.

Alſo auch $\angle x = \angle o$

Da nun $\angle n = \angle n$

ſo iſt auch $\angle m = \angle s$

und $\triangle ABD \sim ABC$

Mithin $AC : AB = AB : AD$

w. z. e. w.

Hieraus folgt nun

$AC \cdot AD = AB^2$

Es iſt aber auch aus gleichem Grunde

$AC \cdot AD = AE^2$

woraus $AB^2 = AE^2$
und $AB = AE$

Wenn man nämlich aus einem Punkte zu einem Umkreiſe zwei Tangenten zieht, ſo ſind ſie einander =.

§. 93. Fig. 84.

Wenn man an dem Endpunkte B einer Geraden AB eine ! BC errichtet, und $BC = \frac{1}{2} AB$ macht: die Hypothenuſe AC zieht, CE = CB abſchneidet, und AF = AE macht, ſo ſagt man: die Linie AB iſt in dem Punkte F nach dem mittlern und äußern Verhältniſſe eingetheilt; d. i.

$$BF : AF = AF : AB.$$

Conſtr. Man verlängere AC willkührlich, und beſchreibe aus C den Kreis EBDE.

Beweis:

Nennen wir der Kürze halber die gegebene Linie AB = a, AF = x, ſo iſt BF = a — x. Da aber BC = EC aus der Conſtruktion, und $BC = \frac{1}{2} AB$, ſo iſt auch EC + CD = AB = a, und nun AD = a + x.

Nun iſt nach vorigem §.

$$AE \, . \, AD = AB^2 \text{ oder}$$
$$x \, . \, (a + x) = a^2$$
$$ax + x^2 = a^2$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x \, . \, x = a\,(a - x)$$

woraus $(a - x) : x = x : a$ oder

$$FB : AF = AF : AB$$

w. z. e. w.

§. 94. Fig. 85.

Wenn man den Halbmeſſer eines Kreiſes BC nach dem mittlern und äußern Verhält- niſſe in dem Punkte D theilt, und die Seh- ne AB = DC macht, ſo iſt ſolche die Seite eines regelmäßigen Zehnecks.

Nämlich es iſt $\angle$ n = ⌒ AHB = 36°.

Beweis:

Es iſt DB : DC = DC : BC a. d. E.

Da nun AB = DC aus gleichem Grunde

ſo iſt auch DB : AB = AB : BC

Daher △ ADB ∾ △ ACB

und $\angle$ n = $\angle$ r

Da nun △ ABC = ſchenklig

ſo iſt auch △ ABD = ſchenklig (A

und auch $\angle$ m = $\angle$ p (B

aber auch $\angle$ p = $\angle$ (q + r) (C

Alſo auch $\angle$ m = $\angle$ q + $\angle$ r

Da nun AB = DC, ſo iſt wegen A, auch AB = AD

Daher auch AD = DC

und auch △ ADC = ſchenklig

weßhalb $\angle$ q = $\angle$ n (D

Ferner iſt $\angle$ m = $\angle$ (n + q) als äußerer

d. i. $\angle$ m = $\angle$ n + $\angle$ n wegen D

d. i. $\angle$ m = $\angle$ 2 n

alſo auch $\llcorner\ p = \llcorner\ 2n$ wegen B

und eben ſo $\llcorner\ q + \llcorner\ r = \llcorner\ 2n$ wegen C

Alſo nun $\llcorner\ n + \llcorner\ (q+r) + \llcorner\ p = n + 2n + 2n$
$= 5\,n = 180°$

woraus $n = \dfrac{180}{5} = 36°$

w. z. e. w.

§. 95. Fig. 85.

Wenn ein gleichſchenkliges △ ſo beſchaffen iſt, daß jeder der gleichen ∠ noch einmal ſo groß iſt, als der dritte, ſo kann man einen Schenkel deſſelben nach dem mittlern und äußern Verhältniſſe theilen, wenn man einen ∟ an der Grundlinie in zwei gleiche Theile theilt, und die Theilungslinie verlängert, bis ſie den andern Schenkel ſchneidet.

Nämlich wenn $s = 2\,n$, und $q = r$
ſo iſt $DB : DC = DC : BC$

Beweis:

Denn es iſt $\llcorner\ s = \llcorner\ p$ vermöge Vorausſetzung
und $\llcorner\ q = \llcorner\ r$ a. d. C.
und auch $\llcorner\ s = 2\,n$ vorausgeſetzt

ſo iſt auch $\llcorner\ q = \llcorner\ n$

und deßhalb △ ADC =ſchenklig (A

Da nun auch $\llcorner\ r = \llcorner\ n$ a. d. C.
und $\llcorner\ p = \llcorner\ p$

ſo iſt auch $\llcorner\ n = \llcorner\ s$

und nun △ ADB ∾ △ ABC und gleichſchenklig (B

Mithin $DB : AB = AB : BC$ (C

Da nun AB = AD wegen B
und AD = DC wegen A

ſo iſt auch AB = DC, dieſes in E gibt
DB : DC = DC : BC

w. z. e. w.

Man kann daher ein gleichſchenkliges △ von dieſer Art zeichnen, wenn man eine Seite BC nach dem mittleren und äußeren Verhältniſſe theilt, und mit einem Halbmeſſer = DC aus D und B in A Kreuz ⌒ ſchlägt, und den dadurch gefundenen Punkt A mit C und B verbindet.

§. 96. Fig. 86.

Wenn eine gerade Linie aus der Seite eines Zehnecks und der Seite eines Sechsecks zuſammengeſetzt iſt, ſo iſt ſie in dem Anſtoßungs-Punkte nach dem mittlern und äußern Verhältniſſe getheilt.

Beweis:

Es ſey DC die Seite des Sechsecks, ſo iſt auch DC = AC = AB = Radius, mithin

△ ABC = ſchenklig
und △ ADC = ſchenklig

deßhalb iſt $\angle$ o = $\angle$ n
$\angle$ x = $\angle$ m

Nun iſt aber $\angle$ m = $\angle$ n + $\angle$ o als äußere

oder $\angle$ m = $\angle$ 2n

da nun $\angle$ m = $\angle$ 2 s wegen §. 94, weil im Zehneck der halbe Polygon $\angle$ 72° und der Mittelpunkts $\angle$ 36° hat.

Alſo auch $\angle$ n = $\angle$ s
Da nun auch $\angle$ x = $\angle$ x

ſo muß auch $\angle$ m = $\angle$ (o + s) ſeyn.

Und deßhalb iſt $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ABD

woraus BC : BA = BA : BD
und da BA = CD a. d. E.

Alſo auch BC : CD = CD : BD

und deßhalb die Linie BD in dem Punkte C nach dem äußern und mittlern Verhältniſſe getheilt; w. z. e. w.

§. 97. Fig. 87.

Das Quadrat der Seite eines Fünfecks, ſo in einen Kreis eingeſchrieben iſt, iſt = dem Quadrate des Radius (Seite des Sechsecks), + dem Quadrate der Seite des Zehnecks.

Nämlich es iſt $AB^2 = AC^2 + DB^2$

Conſtr. Man theile den $\frown$ AC in F in zwei gleiche Theile, ſo iſt nun $\angle$ v der Mittelpunkts $\angle$ eines Zwanzigecks, folglich = 18°. Da nun y der Mittelpunkts $\angle$ eines Fünfecks = 72°, ſo bleibt w = y − v = 72 − 18 = 54°.

Beweis:

Denn es iſt $\triangle$ AEC = ſchenklig
und auch $\triangle$ ABC = ſchenklig } a. d. E.
Alſo $\angle$ n = $\angle$ r
und auch $\angle$ n = $\angle$ s

daher auch $\angle$ r = $\angle$ s

und auch $\angle$ o = $\angle$ (r + z) wenn zwei $\angle$ =, ſo iſt es auch d. 3te.

Folglich $\triangle$ ACE $\sim$ $\triangle$ ACB

woraus AB : AC = AC : AE

und AC^2 = AB : AE (A

Ferner da $\angle\, w = 54^\circ$ a. d. E.
und auch $\angle\, p = 54^\circ$ als halber Polyg. $\angle$ eines Fünfecks, da der ganze 108°.

ſo iſt auch $\angle\, w = \angle\, p$
und deßhalb $\triangle\, DBE$ = ſchenklig
Es iſt aber auch $\triangle\, ABD$ = ſchenklig
Da nun $\angle\, p = \angle\, w = 54^\circ$
ſo iſt auch $\angle\, q = \angle\, 180 - 2 \, . \, 54 = 72^\circ$

---

alſo $\angle\, q = \angle\, y$
und da $\angle\, p = \angle\, p$

ſo muß auch $\angle\, w = \angle\, x$ ſeyn

---

und deßhalb $\triangle\, ABD \backsim \triangle\, DBE$

---

woraus $AB : BD = BD : BE$

---

und $BD^2 = AB \, . \, BE$ (B

Nun iſt aber $AB = BE + AE$

Alſo $AB^2 = AB\,(BE + AE)$

---

d. i. $AB^2 = AB \, . \, BE + AB \, . \, AE$ (C

Wenn man nun die Werthe aus A und B in C ſtellt, ſo iſt

$$AB^2 = BD^2 + AC^2$$

w. z. e. w.

§. 98. Fig. 88.

Man kann durch Verzeichnung die Seite eines Fünfecks folgender Geſtalt finden.

Man errichte auf dem Durchmeſſer AB im Mittelpunkte den Halbmeſſer CF, theile CB in zwei gleiche Theile, und ziehe aus dem Theilungspunkte E mit Radius EF den ⌒ DF, ſo iſt die Sehne DF = HF = der Seite eines regelmäßigen Fünfecks.

Beweis:

Denn es iſt $DF^2 = CF^2 + DC^2$. Da nun CF der Halbmeſſer iſt, ſo darf nur erwieſen werden, daß DC die Seite eines regelmäßigen Zehnecks, ſo folgt ſodann vermöge der vorigen §. §., daß DF die Seite des Fünfecks.

Es ſey der Radius des Kreiſes $CF = CB = a$, ſo iſt aus der Conſtruktion $CE = \frac{1}{2}a$.

Ferner ſey $CD = x$, ſo iſt $EF = ED = x + \frac{1}{2}a$, und $DB = x + a$, ſo iſt nun

$$EF^2 = CF^2 + CE^2$$

oder $(x + \frac{1}{2}a)^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2$

d. i. $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax = a^2 \qquad (A$$

$$x(x + a) = a \cdot a$$

woraus $x + a : a = a : x$

d. i. $DB : BC = BC : DC$

Da nun DB in den Punkten C nach dem mittlern und äußern Verhältniſſe getheilt, der größere Theil aber der Halbmeſſer iſt, ſo muß auch der kleinere DC die Seite des Zehnecks ſeyn; und eben deßhalb iſt DF die Seite des Fünfecks, wie ſchon oben geſagt iſt und aus dem Vorhergehenden erhellet.

Man kann nun mit Hülfe der Gleichung A auf folgende Art leicht eine Formel für die Seite des Fünfecks ausgedrückt finden.

Benennen wir DF mit y, ſo iſt

$$DF^2 = FC^2 + CD^2$$

Wir wollen nun erſt aus Gleichung A den Werth von x entwickeln, dort iſt

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

Dieſen Werth in B ſubſtituirt gibt

$$y^2 = a^2 + \left(-\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2$$

$$y = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\sqrt{5} + \frac{5a^2}{4}\right)}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{10a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}\right)} \quad (\mathfrak{C}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4}(5 - \sqrt{5})} = a\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} =$$ der

Seite des Fünfecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt.

Aus der Gleichung C kann man nun a entwickeln und durch y ausdrücken, ſo hat man eine Formel für den Halbmeſſer, wenn die Seite des Fünfecks gegeben iſt.

In C war

$$y = \sqrt{\left(\frac{5}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}\right)}$$

$$y^2 = \frac{5}{2}a^2 - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}$$

$$y^2 = a^2\left(\frac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)$$

$$\frac{y^2\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)}{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)} = a^2$$

$$\frac{y^2\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)}{\frac{25}{4}-\frac{5}{4}} = a^2$$

$$\frac{y^2\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)}{5} = a^2$$

$$\sqrt{\frac{\frac{5y^2}{2}+\frac{y^2}{2}\sqrt{5}}{5}} = a$$

$$\sqrt{\frac{5y^2+y^2\sqrt{5}}{10}} = a$$

$$y\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = a$$

$$y\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{10}\sqrt{5}} = a$$

= dem Halbmeſſer durch die Seite des Fünfecks, wenn ſolche gegeben iſt, ausgedruckt.

§. 99. Fig. 89.

Das Quadrat der Seite eines in einen Kreis eingeſchriebenen regelmäßigen △s iſt = dem dreifachen □ des zugehörigen Halbmeſſers.

Nämlich $AB^2 = 3\,AE^2$

Beweis:

Es ſey AE = ED = a, AB = b, ſo iſt AF = $\frac{1}{2}$ b, weil CD auf AB ! und durch den Mittelpunkt geht. Noch iſt EF = FD = $\frac{1}{2}$ a, weil D die Seite des Sechsecks = Radius = AE, und deßhalb △ AED

= ſchenklig iſt, wo ED durch die ! AF in zwei gleiche Theile getheilt wird. So iſt nun

$$AE^2 = AF^2 + EF^2$$

$$\text{d. i. } a^2 = \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{b^2}{4}$$

$$\text{und } 3a^2 = b^2$$

w. z. e. w.

Hieraus iſt nun

A) $b = a\sqrt{3}$ = der Seite des △s durch den Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes ausgedrückt.

Auch findet man aus A)

$a = \frac{1}{3} b \sqrt{3}$, eine Formel für den Halbmeſſer durch die Seite des △s ausgedrückt.

§. 100.

So wie wir am Schluſſe des 98. §. einen allgemeinen Ausdruck für die Seite eines Fünfecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt gefunden haben, ſo laſſen ſich auch für die Seiten anderer Vielecke algebraiſche Formeln finden, deren einige wir in dieſem §. entwickeln wollen.

1) Für das Zehneck.

Fig. 85.

Es ſey CB = a, BA = DC = b,
ſo iſt BD = a — b, und daher

$$(a - b) : b = b : a$$

$$\text{woraus } a^2 - ab = b^2 \qquad (A$$

$$b^2 + ab = a^2$$

$$b^2 + ab + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$b = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$b = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$b = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$$ = der Seite des Zehn-ecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt, wie im §. 98. für x.

Aus A folgt ferner

$$a^2 - ab + \frac{b^2}{4} = \frac{5b^2}{4}$$

$$a = +\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{5b^2}{4}}$$ (B

$$a = \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{5}$$

$$a = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})$$ = dem Radius durch die Seite des regelmäßigen Zehnecks ausgedrückt.

Wenn man aber durch Verzeichnung den Halbmeſſer zu einem gegebenen Zehnecke finden ſoll, ſo verfahre man folgender Geſtalt.

Gleichung B war

$$a = \frac{b}{2} + \sqrt{b^2 + \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}FG + \sqrt{FG^2 + \tfrac{1}{4}FG^2}$$ (C

wenn FG die Seite des Zehnecks iſt.

Man errichte nun auf F die ! FE = ½ FG, ziehe GE und verlängere GE, ſo daß EM = FE = ½ FG werde, ſo iſt GM der geſuchte Halbmeſſer, mit welchem

man nur, aus F und G, ⌒⌒ in C zu ſchlagen hat, um aus C den Kreis zu ziehen.

Denn es iſt

$$GM = GE + EM \qquad (D$$

Es iſt aber $GE^2 = GF^2 + FE^2$

$$= GF^2 + (\tfrac{1}{2}\,GF)^2$$

$$= GF^2 + \tfrac{1}{4}\,GF^2$$

und $GE = \sqrt{GF^2 + \tfrac{1}{4}\,GF^2} \qquad (E$

ferner $EM = FE = \tfrac{1}{2}\,FG \qquad (F$

Stellt man nun aus E und F die Werthe in D, ſo iſt

$$GM = \tfrac{1}{2}\,FG + \sqrt{GF^2 + \tfrac{1}{4}\,GF^2}$$

welches die Gleichung E war, und deßhalb GM = a = dem geſuchten Halbmeſſer; w. z. e. w.

Fig. 87.

Betrachten wir die Figur 87, und benennen DC = a und $AC = \tfrac{1}{2}\,a\,(-1 + \sqrt{5})$, nämlich die Seite des Zehnecks, ſo wird es nicht ſchwer werden, die Seite des Fünfecks, nämlich

$$AB = \sqrt{a^2 + [\tfrac{1}{2}\,a\,(-1 + \sqrt{5})]^2}$$

ſo wie in §. 97., zu finden; ich überlaſſe jedoch dieſes dem fleißigen Schüler, da der Ausdruck hier ſchon auf eine andere Art gefunden worden iſt. Ich bemerke jedoch noch, daß man auch bei dieſer Unterſuchung darauf kommen wird, daß das □ des Fünfecks = iſt dem □ des Radius + dem □ des Zehnecks.

II) Für das Quadrat.

Fig. 90.

Es ſey AB = e, AC = a,

ſo iſt $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$e^2 = a^2 + a^2$$

A.) $e = a\sqrt{2}$ = der Seite des regelmäßigen Vierecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt.

Hieraus findet man

$$\frac{e}{\sqrt{2}} = a$$

$$\frac{e\sqrt{2}}{2} = a = \tfrac{1}{2} e\sqrt{2}$$

= dem Halbmeſſer durch die Seite des Quadrats ausgedrückt.

III) Für das Achteck.

Fig. 90.

Es ſey AD = f = der Seite des Achtecks. Ferner iſt EC = EB = EA = ½ AB, welches auf folgende Art erwieſen werden kann.

Da ∟ ſ = 90°, ſo iſt ∟ r = ∟ o = 45°. 15°

Es iſt aber auch ∟ n = 90°, alſo auch ∟ q = 45°, und deßhalb △ AEC =ſchenklig. Alſo AE = EC = ½ AB = ½ e.

Auch kann daſſelbe auf folgende Art erwieſen werden.

$EC^2 = a^2 - (\tfrac{1}{2}e)^2$, und

$$EC = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}e^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - e^2}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - e^2}$$

Nun iſt aber nach II. A, $e = a\sqrt{2}$. Daher

$$EC = \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - (a\sqrt{2})^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \underbrace{\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}.}$$

Da nun nach Nro. II. $AB = a\sqrt{2}$, ſo iſt auch $\underbrace{EC = \tfrac{1}{2}AB.}$

Da nun $EC = \tfrac{1}{2}AB = AE = \tfrac{1}{2}e$ und $e = a\sqrt{2}$, ſo iſt $\tfrac{1}{2}e = \tfrac{1}{2}\underbrace{a\sqrt{2} = AE = CE}$, und auch $(\tfrac{1}{2}e)^2 = (\tfrac{1}{2}a\sqrt{2})^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \cdot 2 = \tfrac{1}{2}a^2$ (A

Ferner iſt DE = CD — CE = $\underbrace{a - \frac{1}{2} a \sqrt{2}}$. (B

Nun iſt $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}$
hierein die Werthe aus A und B, ſo iſt

$$AD = f = \sqrt{(\tfrac{1}{2} a^2) + (a - \tfrac{1}{2} a \sqrt{2})^2}$$

$$f = \sqrt{\tfrac{1}{2} a^2 + a^2 - a^2 \sqrt{2} + \tfrac{1}{2} a^2}$$

$$= \sqrt{2 a^2 - a^2 \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{a^2 (2 - \sqrt{2})} = \underbrace{a \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

die Formel für die Seite des Achtecks, wenn der Halbmeſſer gegeben iſt.

Aus der letzten Gleichung kann nun wieder a entwickelt, und der Halbmeſſer durch die Seite des Achtecks ausgedrückt gefunden werden.

$$f = a \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{f}{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}} = a$$

$$\frac{f^2}{2 - \sqrt{2}} = a^2$$

$$\frac{f^2 (2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = a^2$$

$$\frac{2 f^2}{2} + \frac{f^2 \sqrt{2}}{2} = a^2$$

$$\sqrt{\frac{f^2 (2 + \sqrt{2})}{2}} = a$$

$$f \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = a$$

$$\underbrace{f \sqrt{1 + \tfrac{1}{2} \sqrt{2}} = a}$$

Wäre z. B. die Seite des Achtecks = 100 Ruthen, ſo iſt der Halbmeſſer dazu

$$a = 100\sqrt{1 + \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}4142}$$
$$= 100\sqrt{1 + 0{,}7071}$$
$$= 100\sqrt{1{,}7071} = 100 \,.\, 1{,}306\ldots\ldots$$
$$= 130{,}6\ldots.$$

Man könnte nun auf dieſe Art fortfahren, und aus der Seite des Achtecks die des Sechzehnecks u. ſ. w. finden; allein ich überlaſſe dieſes dem Schüler zur eigenen Uebung. Es ſoll jedoch im folgenden §. gezeigt werden, wie man aus der Sehne des ganzen Bogens und dem Halbmeſſer die Sehne des halben Bogens findet.

§. 101. Fig. 90.

Es ſey wieder $AC = a$, und die Sehne $AB = b$, ſo iſt

$$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2}$$
$$EC = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

Ferner $DE = DC - EC$

$$= a - \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

Nun iſt $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}$

d. i. $AD = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + (a - \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}b^2})^2}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 + a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} + a^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$
$$= \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)}}$$
$$= \sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{4}}}$$
$$= \sqrt{2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - b^2)}}$$

welches die geſuchte Formel iſt.

Wenden wir das Gefundene auf das Sechseck an, um daraus die Seite des Zwölfecks zu finden, ſo iſt a = b, nämlich die Seite dem Radius gleich. Daher

$$AD = \sqrt{2a^2 - a\sqrt{(4a^2 - a^2)}} = \sqrt{2a^2 - a\sqrt{3a^2}}$$
$$= \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{3}} = \sqrt{a^2(2 - \sqrt{3})}$$
$$= a\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (\mathfrak{A}$$

Solche Ausdrücke, wie der eben gefundene, können nun nach der im erſten §. ꝛc. des dritten Bandes entwickelten Formel

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}}$$

noch abgekürzt werden.

So wäre für $\mathfrak{A}$, a = 2, b = 3

$$AD = a\left[\sqrt{\tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1}} - \sqrt{\tfrac{2}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{1}}\right]$$
$$= a\left[\sqrt{\tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{2}{2} - \tfrac{1}{2}}\right]$$
$$= a\left[\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right] = a\left[\sqrt{\tfrac{6}{4}} - \sqrt{\tfrac{2}{4}}\right]$$
$$= a\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{6} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right] = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

welches alſo nun die Formel für die Seite des Zwölfecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt iſt.

§. 102.

Durch ähnliche algebraiſche Entwickelungen, die ich dem Anfänger nicht genug empfehlen kann, wollen wir noch die Senkrechte, in einigen Vielecken durch ihre Seite ausgedrückt, oder, was einerlei iſt, den Radius des eingeſchriebenen Kreiſes entwickeln.

1) Für das Fünfeck.

Fig. 91.

Es ſey $DB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}y$, ſo iſt $DB^2 = \frac{1}{4}y^2$.

Aus §. 98. wiſſen wir, daß

$$a = CB = \sqrt{\frac{5y^2 + y^2\sqrt{5}}{10}} \text{ war,}$$

alſo $DC^2 = CB^2 - DB^2$

$$\text{d. i. } DC = \sqrt{\frac{5y^2 + y^2\sqrt{5}}{10} - \tfrac{1}{4}y^2}$$

$$DC = \sqrt{\tfrac{5}{10}y^2 + \tfrac{1}{10}y^2\sqrt{5} - \tfrac{1}{4}y^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{2}{4}y^2 - \tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{1}{10}y^2\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{2y^2}{4 \cdot 5}\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{\frac{y^2}{4}(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})}$$

II) Für das Sechseck.

Fig. 91.

Hier iſt

$$CD = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$$

III) Für das Achteck.

Fig. 91.

Findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren

$$CD = \tfrac{1}{2}f\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

und nach der im vorigen §. bezogenen Formel des dritten Bandes $CD = \tfrac{1}{2}f(1 + \sqrt{2})$

IV. Für das Zehneck

findet man eben ſo

$$CD = \tfrac{1}{2}b\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Ich überlaſſe dieſe beiden Entwickelungen aus III. und IV. dem Schüler ſelbſt, da ſolche, ganz mit der in I. gemachten, gleichförmig behandelt werden.

Fig. 91.

V) Zum Schluſſe dieſes §. will ich noch die Senkrechte für das Zwölfeck herleiten, wozu aber erſt die Seite gefunden werden muß.

Es war oben für das Sechseck $CD = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$, $AB = AC = a$, und $AD = \frac{1}{2} a$. Daher $DE = CE - CD = a - \frac{1}{2} a \sqrt{3}$.

Ferner $AE^2 = AD^2 + DE^2$

$$AE = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a)^2 + (a - \tfrac{1}{2} a \sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + a^2 - a^2\sqrt{3} + \tfrac{3}{4}a^2}$$
$$= \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$

= der Seite des regelmäßigen Zwölfecks durch den Halbmeſſer ausgedrückt.

Benennen wir nun dieſe Seite mit g, ſo iſt

$$g = a\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$

$$\frac{g}{\sqrt{(2 - \sqrt{3})}} = a$$

$$\frac{g^2}{2 - \sqrt{3}} = a^2$$

$$\frac{g^2(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = a^2$$

$$\frac{g^2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{4 - 3}} = a^2$$

$$\frac{g\sqrt{(2 + \sqrt{3})}}{4 - 3} = a$$

$$g\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = a$$

= dem Halbmeſſer durch die Seite des Zwölfecks ausgedrückt.

Nun iſt wieder wie in I.

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$CD = \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} g^2}$$

$$CD = \sqrt{(g\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - \tfrac{1}{4} g^2}$$

$$= \sqrt{g^2 (2+\sqrt{3}) - \tfrac{1}{4} g^2}$$

$$= \sqrt{2g^2 + g^2\sqrt{3} - \tfrac{1}{4} g^2}$$

$$= \sqrt{\frac{7g^2}{4} + g^2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{7g^2}{4} + \frac{4g^2}{4}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2} g \sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

Dieſen letzten Ausdruck verwandelt man in $\frac{1}{2}g\sqrt{7+\sqrt{48}}$, ſo kann hier wieder die mehr erwähnte Formel des dritten Bandes angewendet werden, und man findet endlich

$$CD = \tfrac{1}{2} g (2 + \sqrt{3})$$

= der Senkrechten im regelmäßigen Zwölfecke, oder dem Radius des eingeſchriebenen Kreiſes.

§. 103. Fig. 92.

In jedem ſtumpfwinkligen △ iſt das □ der Seite AC, welche dem ſtumpfen ∟ gegenüber liegt, = den □□ der zwei andern Seiten AB und BC + zwei Rechtecken, welche entſtehen, wenn man die als Grundlinie angenommene Seite BC mit ihrer Verlängerung bis zur ! AD multiplizirt.

Nämlich es iſt $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC.BD$

oder $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$

Beweis:

Denn es iſt $AC^2 = AD^2 + DC^2$

oder $a^2 = y^2 + (b+x)^2$

$a^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x2$ (A

Ferner auch $AB^2 = AD^2 + DB^2$

oder $c^2 = y^2 + x^2$ (B

Wenn man nun für $y^2 + x^2$ den hier gefundenen Werth c^2 aus B in A ſtellt, ſo ergibt ſich

aus $a^2 = (y^2 + x^2) + b^2 + 2bx$

und $a^2 = c^2 + b^2 + 2bx$

w. z. e. w.

§. 104. Fig. 93.

In jedem ſpitzwinkligen △ iſt das □ einer Seite AB, die einem ſpitzigen ∟ C gegenüber ſteht, + zwei Rechtecken, die aus der Grundlinie AC mit dem durch die ! BD gemachten Abſchnitte DC, welcher dem angenommenen ∟ C zunächſt liegt, = den □;□ der beiden übrigen Seiten.

Nämlich es iſt $AB^2 + 2AC.DC = AC^2 + BC^2$

Beweis:

Nehmen wir der Kürze halber die der Figur zugefügten Buchſtaben an, ſo wird $AD = c - x$, wenn $DC =$ iſt; und da

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

d. i. $a^2 = y^2 + (c-x)^2$

nämlich $a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$

$a^2 + 2cx - c^2 - x^2 = y^2$ (A

Ferner iſt $BC^2 = BD^2 + DC^2$

d. i. $b^2 = y^2 + x^2$

und $b^2 - x^2 = y^2$ (B

So wird nun aus A und B

$$a^2 + 2cx - c^2 - x^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 + 2cx = b^2 + c^2$$

w. z. e. w.

Wäre das $\triangle$ rechtwinklig, ſo würde, wenn c ein rechter ∟ wäre, $x = o$ werden, und daher

$$a^2 + 2c.o = b^2 + c^2$$

nämlich $a^2 = b^2 + c^2$, wie bekannt iſt.

§. 105. Fig. 94.

Zwei gleiche Sehnen ſtehen in einem Kreiſe = weit vom Mittelpunkte ab.

Nämlich wenn $AB = CD$, ſo iſt auch $FE = GE$.

Conſtr. Man theile die Sehnen in zwei gleiche Theile, ſo daß $AF = BF$, und $CG = DG$ werde, ſo iſt auch $CG = AF$, oder $b = d$. Ferner ziehe man die Halbmeſſer AE und CE.

Beweis:

Es iſt $a^2 = b^2 + c^2$

und auch $a^2 = d^2 + f^2$

Alſo auch $b^2 + c^2 = d^2 + f^2$ (A

Da nun $b = d$ a. d. C.

ſo iſt auch $b^2 = d^2$

und auch $c^2 = f^2$

und $c = f$; w. z. e. w.

§. 106. Fig. 94.

Wenn in einem Kreiſe zwei Sehnen = weit vom Mittelpunkte abſtehen, ſo ſind ſie auch einander gleich.

Nämlich wenn FE = GE, ſo iſt auch AB = CD.

Conſtr. Wie im vorigen §.

Beweis:

Hier iſt wieder $b^2 + c^2 = d^2 + f^2$

Da nun $c = f$ angenommen

ſo iſt auch $c^2 = f^2$

und auch $d^2 = b^2$

und $d = b$

Alſo auch $2d = 2b$

d. i. AB = CD

Zieht man nun hier noch die Halbmeſſer BE und DE, ſo iſt nach den vorigen beiden §. §. augenſcheinlich

△ AFE = △ CGE

und kann eben ſo erwieſen werden, daß

△ BFE = △ DGE

mithin △ ABE = △ DCE

und ∟ AEB = ∟ DEC

Alſo auch ⌒ ANB = ⌒ DMC

nämlich gleiche Sehnen AB und CD ſpannen gleiche Bogen, wie ſchon früher ad. Fig. 5. geſagt worden iſt.

§. 107. Fig. 95.

Wenn man aus dem Punkte M, er ſtehe im Kreiſe wo er wolle, auf den Durchmeſſer

AB eine Senkrechte MG zieht, ſo iſt dieſe die mittlere Proportionale zwiſchen denen dadurch entſtandenen Abſchnitten des Durchmeſſers.

Nämlich wenn MP ! AB, ſo iſt auch AP : PM = PM : PB.

Conſtr. Man ziehe AM und MB, ſo iſt das △ rechtwinklig, weil ſeine Schenkel auf den Endpunkten des Durchmeſſers ſtehen.

Beweis:

Nun iſt △ AMP ∾ △ AMB
und auch △ BMP ∾ △ AMB } wegen der ! MP

alſo auch △ AMP ∾ △ BMP

Folglich AP : PM = PM : PB

w. z. e. w.

Man kann dieſen Satz auch mit Hülfe des 90. §. erweiſen.

Conſtr. Man verlängere MP bis in D.

Beweis:

So iſt vermöge jenes §.

AP . PB = MP . PD

Da nun MP = PD weil AB ! MD

Alſo auch AP . PB = PM . PM

und AP : PM = PM : PB

w. z. e. w.

Nicht allein beim Kreiſe, ſondern auch bei jeder andern krummen Linie, heißt eine Gerade wie AP eine Abſciſſe, und die ! PM eine Ordinate. Eine Gerade AB wird die Abſciſſen-Linie, und A der Anfangspunkt der Abſciſſen genannt.

§. 108. Fig. 96.

Durch Hülfe der Abſciſſen und Ordinaten kann man nun ſowohl einen Kreis, als auch jede andere krumme Linie auftragen.

Sollte z. B. ein ſehr großer Kreis auf dem Felde gezogen werden, und es wäre ſowohl wegen der Größe des Halbmeſſers, als auch wegen anderer Hinderniſſe, unmöglich, die früher gezeigte Art zu wählen: ſo würde man den Durchmeſſer ao abſtecken, und auch die gemeſſenen Entfernungen oder Abſciſſen ab, ac, ad, ae, af ꝛc., und nun die Ordinaten bh, ci, dk, ꝛc. ꝛc. berechnen, indem nach vorigem §.

$$ab \cdot bo = bh^2$$

$$\text{d. i. } bh = \sqrt{ab \cdot bo}$$

$$\text{Eben ſo iſt } ci = \sqrt{ac \cdot co}$$

$$\text{und } dk = \sqrt{ad \cdot do} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Je näher bei dieſer Conſtruktion des Kreiſes die Entfernungen ab, bc, cd ꝛc. angenommen würden, je mehr würde der abgeſteckte Kreis ſich der Richtigkeit der wahren Kreislinie nähern; da aber übrigens die Entfernungen hi, ik, kl ꝛc. ſo zu ſagen, aus freier Hand gezogen werden müßten, ſo iſt es klar, daß die Krumme nicht mathematiſch genau eine Kreislinie ſey, wohl aber genau genug, wenn ſolche zum Abſtecken irgend einer Fortifikations- oder andern Arbeit dienen ſollte, z. B. einer runden Feldſchanze ꝛc.

Nützlicher aber noch iſt der Gebrauch der Abſciſſen und Ordinaten bei Aufnahme krummer Linien auf dem Felde. Es ſey z. B. COGHIKLMN ꝛc. das aufzunehmende Ufer eines Fluſſes, ſo würde auf einem Felde oder Wieſe darneben die gerade Linie ox gemeſſen und

abgeſteckt, ſodann auf ſolcher die Entfernungen OA, OB, OC ꝛc., und in den Punkten A, B, C ꝛc. die Senkrechten AG, BH ꝛc. errichtet und gemeſſen; und ſodann auf dem Papiere oder Meßtiſche, ſowohl die Ordinaten als Abſciſſen, nach verkleinertem Maaße aufgetragen, und ſo die Punkte G, H, I, K ꝛc. beſtimmt, und die Linien GH, HI, IK ꝛc. aus freier Hand und nach dem Augenmaße eingetragen. Hier wird ebenfalls die Zeichnung um ſo richtiger, je näher die Entfernungen OA, AB, BC ꝛc. angenommen werden.

§. 109. Fig. 95.

Setzt man den Halbmeſſer AC = a, ſo iſt der Durchmeſſer AB = 2a. Nun ſey die Abſciſſe AP = x, ſo iſt BP = 2a — x; und wenn MP = y geſetzt wird,

ſo iſt $y^2 = (2a - x) \cdot x$

d. i. $PM = y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$ (A

welches nun die Gleichung für den Kreis, von welcher ſchon im vorigen §. Gebrauch gemacht worden iſt, und welche die Eigenſchaft des Kreiſes ausdrückt:

daß das Quadrat einer jeden Senkrechten PM = iſt dem Produkte, aus den zugehörigen Abſchnitten auf dem Durchmeſſer.

Daß in der Gleichung A das Wurzelzeichen $\pm$ hat, bedeutet hier, daß die dadurch zu findende Ordinate, ſowohl über dem Durchmeſſer, nämlich PM, oder unter ſolchem, als PD, angenommen werden kan.

Setzt man aber den Anfangspunkt der Abſciſſen in den Mittelpunkt, ſo wird, wenn CP = x, nun AP = a — x und PB = a + x, daher

$$y^2 = (a - x)(a + x)$$

$$y^2 = \pm\sqrt{a^2 - x2}$$

welches auch aus dem rechtwinkligen $\triangle$ MPC hergeleitet werden kann. Denn hier iſt

$$MC^2 = MP^2 + PC^2$$

und $MP^2 = MC^2 - PC^2$

d. i. $y^2 = a^2 - x^2$

und $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, wie oben,

wo das Zeichen $\pm$ eben dieſelbe Bedeutung hat, wie wir ſchon erwähnt haben.

Aus der eben gefundenen Gleichung können nun folgende Eigenſchaften des Kreiſes abgeleitet werden.

I) Die Ordinate im Mittelpunkte der Kreiſe iſt = dem Halbmeſſer.

Nämlich es iſt CN = AC = CB.

Denn es iſt hier $x = 0$

folglich $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} = \pm \sqrt{a^2 - 0}$

$= \pm \sqrt{a^2} = \pm a$

II) Zu zwei Abſciſſen, wovon die eine poſitiv und die andere negativ iſt, d. h. wovon die eine dieſſeits und die andere jenſeits des Mittelpunktes liegt, gehören gleiche Ordinaten.

Nämlich wenn $CP = cp = \pm x$, ſo iſt auch $PM = pm$, $PD = pd$ und $MD = md$, weil zwei Sehnen einander = ſind, wenn ſie gleichweit vom Mittelpunkte entfernt liegen.

III) In den Endpunkten des Durchmeſſers ſind die Ordinaten = o.

Denn es iſt hier $x = a$,

mithin $y = \pm \sqrt{a^2 - a^2} = 0$

und auch wenn $x = - a$

ſo iſt $y = \pm\sqrt{[a^2-(-a)^2]} = \pm\sqrt{[a^2-(+a^2)]}$
$= \pm\sqrt{a^2-a^2} = +\sqrt{0} = 0$, wie oben.

IV. Über die Endpunkte des Durchmeſſers hinaus iſt keine Ordinate möglich.

Man ſetze $x = a + p$, ſo wird

$$y = \pm\sqrt{[a^2-(a+p)^2]} = \pm\sqrt{[a^2-(a^2+2ap+p^2)]}$$
$$= \pm\sqrt{(a^2-a^2-2ap-p^2)} = \pm\sqrt{(-2ap-p^2)}$$

eine unmögliche Größe, man mag p ſo klein oder ſo groß annehmen, als man will.

Und ſetzt man $x = -(a+p)$, ſo iſt

$$y = \pm\sqrt{a^2-[-(a+p)]^2} = \pm\sqrt{[a^2-(-a-p)^2]}$$
$$= \pm\sqrt{a^2-(a^2+2ap+p^2)} = \pm\sqrt{a^2-a^2-2ap-p^2}$$
$$= \pm\sqrt{-2ap-p^2}$$, wie oben.

V) Jede Gerade CM aus dem auf obige Art angenommenen Anfangspunkte C zu einem beliebigen Punkte des Umkreiſes iſt dem Halbmeſſer gleich; wodurch erwieſen, daß alle Punkte des Umkreiſes = weit vom Mittelpunkte entfernt ſind.

Denn es iſt $CM^2 = CP^2 + PM^2$

$$\text{d. i. } CM^2 = x^2 + y^2$$

$$CM^2 = x^2 + (a^2 - x^2)$$
$$CM = \sqrt{a^2} = a$$

VI) Man kann auch die Ordinate y zu der zugehörigen Abſciſſe x durch eine unendliche Reihe ausdrücken, wenn man nach §. 321 des vierten Theils, und zwar nach der Formel G, nämlich nach

$$(a+b)^n = p^n + nAQ + \frac{n-1}{2} BQ + u.$$

verfährt, und hierdurch

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ entwickelt,}$$

nämlich $y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, wo ſodann

$p = a^2$, $Q = -\frac{x^2}{a^2}$ und $n = \frac{1}{2}$. Man findet dann

$$y = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \text{ꝛc.}$$

Wer mit dieſer Formel noch nicht gehörig umzugehen weiß, kann auch auf dem gewöhnlichen Wege durch Ausziehung der Quadratwurzel aus $a^2 - x^2$ die obige Reihe finden; und man ſieht hier ſchon aus den vier erſten Gliedern, daß die Reihe leicht fortgeſetzt werden kann, indem das Geſetz ſchon aus dem dritten und vierten Gliede deutlich erhellet.

Wenn man dieſe Reihe genau betrachtet, ſo ergibt ſich

α) daß, wenn $x = 0$ wird, $y = a =$ dem Halbmeſſer werden muß, wie oben in IV. erwieſen wurde: denn alle übrigen Glieder, das erſte ausgenommen, ſind mit x, alſo hier mit 0 multiplizirt und fallen weg.

β) Sieht man auch leicht ein, daß, je größer x wird, je kleiner muß y werden, bis endlich, wenn $x = a$ wird, y in 0 übergehen muß, wie ſchon oben in III. erwieſen wurde.

§. 110. Fig. 95.

Wenn man die Abſciſſen-Linie AB verlängert, und ſolche durch die am Endpunkte der Ordinate gezogene Tangente durchſchneidet, ſo heißt das Stück der Abſciſſen-Linie PT die Subtangente.

Die Subtangente kann ebenfalls durch die bisher gebrauchten Größen a, x und y ausgedrückt werden.

Das △ TMC iſt rechtwinklig, weil MC der Radius und TM die Tangente, daher

$$\triangle TMP \sim \triangle PMC$$

woraus $TP : PM = PM : PC$

oder $TP : y = y : x$

und $TP = \frac{y^2}{x} = \frac{a^2 - x^2}{x}$

$$= \frac{a^2}{x} - x$$

Setzt man $x = 0$, ſo daß $y = CN = a$, ſo iſt

$$TP = \frac{a^2}{0} - 0 = \infty$$

was ſehr leicht zu begreifen iſt, da in dieſem Falle die Tangente mit der Abſciſſen-Linien parallel läuft, folglich die letztere von der erſtern nie durchſchnitten werden kann: denn wenn $CP = 0$, ſo wird $CN = a =$ dem Halbmeſſer. Da nun dieſer, vermöge der Conſtruktion auf AB ! ſteht, und die Tangente auf CN ſenkrecht ſtehen muß, ſo muß auch Nt mit AB parallel laufen.

§. 111.

Wenn Vielecke ſo beſchaffen ſind, daß ſie gleich viele Polygon-∠ haben, die einander wechſelsweiſe gleich ſind, und durch Diagonalen oder andere gleichnahmige Linien in lauter ähnliche △△ zertheilt werden können, ſo heißen ſie ähnliche Vielecke.

Es folgt nun aus dieſer Erklärung

I) daß alle regelmäßigen Vielecke, von einerlei Gattung, einander ähnlich ſind. Denn ihre Polygon∠ ſind einander gleich und ihre Anzahl iſt gleich; da ſie nun überdies vom Mittelpunkte aus in lauter ähnliche △△ getheilt werden können, ſo ſind ſie auch einander ähnlich.

Fig. 97.

II) Jede zwei Seiten eines Vielecks ſte-

hen mit zwei gleichnahmigen Seiten eines ähnlichen andern Vielecks in Proportion.

z. B. AB : AC = ab : ac.

Denn vermöge der vorhergegangenen Erklärung ſind die △△ ABC und abc ähnlich, folglich auch das Obige richtig.

Aus gleichem Grunde iſt auch

AC : AD = ac : ad ꝛc.

oder auch AB : BC = ab : bc

und AE : ED = ae : ed ꝛc. ꝛc.

weßhalb man auch ſagen kann: bei ähnlichen Vielecken ſtehen die Seiten, welche gleiche Winkel einſchließen, in Proportion.

III) Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten ſich zu einander, wie jede Seite des einen zur gleichnahmigen Seite des andern Vieleckes.

Es ſey der Umfang (Perimeter) des einen Vieleckes nämlich AB + BC + CD + DE + EA = P, der Umfang des andern ab + bc + cd + de + ea = p, ſo iſt

P : p = AB : ab

P : p = BC : bc ꝛc. ꝛc.

Denn es ſind nach Nro. II.

AB : ab
BC : bc
CD : cd } lauter gleiche Verhältniſſe.
DE : de
EA : ea

Alſo auch AB + BC + CD + DE + EA

: ab + bc + cd + de + ea = AB : ab

= BC : bc

d. i. P : p = AB : ab = BC : bc ꝛc. ꝛc.

Denn es iſt, vermöge der Lehre von den Proportionen §. 152. II. Band

Bei gleichen Verhältniſſen, die Summe aller erſten Glieder zur Summe aller zweiten Glieder, wie jedes erſte Glied zu ſeinem zugehörigen zweiten.

§. 112. Fig. 98.

Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von einerlei Art verhalten ſich gegen einander, wie die Halbmeſſer der darum beſchriebenen Kreiſe.

Setzen wir nämlich den Umfang des größern $= P$, des kleinern $= p$, ſo iſt $P : p = AO : ao$.

Beweis:

Denn es iſt $\triangle\ AOF \sim aof$ vorausgeſetzt.

alſo auch $AF : af = AO : ao$

Es iſt aber auch $AF : af = P : p$ nach vorigem §.

Alſo auch $P : p = AO : ao$

w. z. e. w.

Es verhalten ſich aber auch die Umfänge ähnlicher regelmäßiger Vielecke wie die Halbmeſſer der eingeſchriebenen Kreiſe.

Nämlich $P : p = NO : no$

Beweis:

Denn es iſt $\triangle\ FOE \sim foe$ und gleichſchenklig

Da nun ON ! FE und on ! fe als Bedingung

ſo iſt auch $\triangle\ FON = \triangle\ EON$ } als Hälften von
und $\triangle\ fon = eon$ } FOE u. foe.

folglich auch $\triangle\ FON \sim fon$

Alſo FN : fn = ON : on
und 2FN : 2fn = ON : on

d. i. FE : fe = ON : on
da nun auch FE : fe = P : p nach vorigem §.

ſo iſt auch P : p = ON : on

w. z. e. w.

§. 113. Fig. 99.

Es wird nun nicht ſchwer werden einzuſehen, daß man den Kreis als ein Vieleck von einer unendlichen Anzahl gleicher, unendlich kleiner Seiten anſehen kann, und deßhalb leicht zu ſchließen iſt, daß auch die Umkreiſe ſich gegen einander verhalten wie ihre Halbmeſſer.

Nämlich daß K : k = AO : ao (A
Da nun auch K : k = 2AO : 2ao
d. i. K : k = AN : an

ſo iſt es auch erwieſen, daß die Umkreiſe ſich gegen einander verhalten wie ihre Durchmeſſer.

Eben ſo läßt ſich auch erweiſen, daß ⌒ ähnlicher Ausſchnitte ſich gegen einander verhalten wie ihre Halbmeſſer.

Nehmen wir an, es ſey $\frown ABC = \frac{1}{n} K$, und $\frown abc = \frac{1}{n} k$, ſo iſt in

A) $\frac{1}{n} K : \frac{1}{n} k = AO : ao$
d. i. $\frown ABC : \frown abc = AO : ao$
und auch $\frown ABC : \frown abc = AN : an$

w. z. e. w.

Wäre nun das wahre Verhältniß des Durchmeſſers oder Halbmeſſers zum Umkreiſe beſtimmt, ſo würde es jetzt nicht ſchwer werden, zu jedem gegebenen Halbmeſſer oder Durchmeſſer den Umkreis oder auch die Länge eines beliebigen Bogens zu finden. Man hat aber bis jetzt dieſes Verhältniß im mathematiſchen Sinne noch nicht genau gefunden, ſich jedoch der Richtigkeit ſo genähert, daß man für jede Rechnung den noch obwaltenden Fehler für Nichts anſehen kann.

In früheren Zeiten iſt man folgendermaßen verfahren, um dieſes Verhältniß zu finden. Man hat nämlich in einem Kreiſe ein regelmäßiges 96 Eck eingeſchrieben, und deſſen Umfang beſtimmt. Ferner hat man auch um denſelben Kreis ein 96 Eck verzeichnet, und auch deſſen Umfang berechnet; zwiſchen beiden Umfängen iſt ſodann die mittlere arithmetiſche Proportionale geſucht und für die Länge des Umkreiſes angenommen worden.

Man hat auf dieſe Art gefunden

Diameter : Peripherie = 7 : 22

genauer aber D : P = 113 : 355.

Dieſe letzten Verhältniß-Zahlen laſſen ſich für den Anfänger leicht behalten, weil ſie die drei erſten Prim-Zahlen, zu zweien neben einander geſetzt und in der Mitte aus einander geſchnitten, ſind; nämlich

11 3 | 3 55

Später hat man das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe durch die Rechnung des Unendlichen genauer, jedoch auch nur durch Näherung, gefunden, welches ich ſpäter zeigen werde. Dort iſt der Durchmeſſer zu 1. angenommen, und die Peripherie zu 3,14...... mit einer Menge Decimalſtellen gefunden worden.

Einige Aufgaben über die Proportional-Linien.

§. 114. Fig. 100 a.

Zu drei gegebenen Geraden die vierte Proportionale zu finden.

Man errichte einen ∟ ABC von einer beliebigen Anzahl Grade, trage nun die erſte gegebene Linie von C nach D, die zweite von C nach E, und die dritte von C nach F auf, ziehe DE und durch F zu DE die Parallele FG, ſo iſt wegen Ähnlichkeit der △△

$$CD : CE = CF : CG$$

mithin CG die geſuchte vierte Proportional-Linie; d. i.

$$CG = \frac{CE \cdot CF}{CD}$$

wie man nämlich CG durch Rechnung findet, wenn die drei gegebenen Linien in Zahlen bekannt ſind.

Oder:

Fig. 100 b.

Man mache auf einem ſolchen ∟ CD = der erſten, CE = der zweiten, und DF = der dritten gegebenen Linie, ziehe DE, und hierzu durch F die Parallele FG, ſo iſt aus Gründen, wie vorher

$$CD : CE = DF : EG.$$

§. 115.

Zu zwei gegebenen Geraden die dritte Proportional-Linie zu finden.

Fig. 101 a.

Auf einem ∟, wie vorher, mache man CD = der erſten, CE = der zweiten, und CF = der dritten der gegebenen Linien, ziehe DE, und wie vorher durch F die Parallele FG, ſo iſt aus mehr erwähntem Grunde, wie vorher

$$CD : CE = CF : CG$$

und da $CE = CF$ aus der Conſtr.

---

alſo auch $CD : CE = CE : CG$

und CG die geſuchte dritte Proportionale, d. i. durch Rechnung

$$CG = \frac{CE^2}{CD}$$

Oder:

Fig. 101 b.

Auf dem verzeichneten ∟ mache man CD = der erſten, CE = der zweiten gegebenen Linie = DF, und ziehe, wie vorher, DE und die ⋕ FG, ſo iſt

$$CD : CE = DF : EG$$

und da $CE = DF$ a. d. Conſtr.

Alſo auch $CD : CE = CE : EG$

§. 116. Fig. 102.

Zu zwei gegebenen Geraden eine mittlere Proportionale zu finden.

Man ſetze die beiden gegebenen Linien AD und DB als eine einzige Gerade zuſammen, theile ihre Summe AB in zwei gleiche Theile in C, und ziehe den Halbkreis AEB, errichte endlich in dem Anſtoßungspunkte D die ⊥ ED, ſo iſt ſolche die mittlere Proportionale.

Denn es iſt $AD : DE = DE : DB$ nach §. 106.

---

und $DB = \frac{DE^2}{AD}$ wenn DB durch Rechnung gefunden werden ſollte.

Oder:

Fig. 103.

Man mache AC = der größeren, und DC = der kleineren gegebenen Geraden, errichte aus E über AD

den Halbkreis ABD, und laſſe aus C die Tangente CB zu ſolchem herab, ſo iſt ſolche die geſuchte mittlere Proportionale; und es iſt

DC : BC = BC : AC,

welches aus §. 92. deutlich wird.

Oder auch

Fig. 104.

Man ziehe AD gleich der größern, und errichte darüber den Halbkreis, und ſchneide auf AD, AC = der kleinern gegebenen Linie ab, errichte die ⊥ CB und ziehe AB, ſo iſt dieſes die geſuchte mittlere Proportionale.

Denn es iſt wegen Ähnlichkeit der △△

AC : AB = AB : AD

§. 117. Fig. 105.

Es iſt die Summe zweier Linien und ihre mittlere Proportionale gegeben, man ſoll die Linie ſelbſt finden.

Man theile die gegebene Summe der beiden Linien, hier AC, in zwei gleiche Theile in F, und ſchlage aus F den Halbkreis AEC; an einem der Endpunkte von AC, hier in A, errichte man eine Senkrechte AD von der Länge der gegebenen mittlern Proportionale; nun ziehe man aus D zu AC die Parallele DE, bis ſolche den Halbkreis in E ſchneidet, laſſe aus E die Senkrechte EB herab, ſo ſind AB und BC die Theile der Summe AC.

Denn es iſt AB : BE = BE : BC

Da nun BE = AD als ⊥ zwiſchen ⫲

ſo iſt auch AB : AD = AD : BC

w. z. e. w.

§. 118. Fig. 106.

Eine gegebene gerade Linie CD in eine ver-

langte Anzahl, z. B. in ſechs gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe eine beliebige Gerade AB, trage auf ſolcher ſechs gleiche Theile dergeſtalt auf, daß A 6 größer, als die gegebene CD werde; über A6 errichte man das gleichſeitige $\triangle$ AE6, und verbinde E mit 1, 2, 3, 4, 5 durch Linien; endlich mache man EG = EF = der gegebenen CD, ſo iſt auch FG = CD, und Ga, ab, bc, cd, de, eF ſind die verlangten gleichen Theile.

Denn es iſt $\triangle$ AEB $\sim$ $\triangle$ GEF

weil EA = E6 } a. d. E.
und EG = EF }

Daher auch CG : EA = EF : E6

Alſo auch EG : GF = EA : A6

Ferner iſt A1 : A6 = 1 : 6
A2 : A6 = 2 : 6 ꝛc.

Da nun auch $\triangle$ EGa $\sim$ $\triangle$ EA1,
$\triangle$ EGb $\sim$ $\triangle$ EA2 ꝛc. ꝛc.
ſo iſt Ga : GF = 1 : 6

woraus Ga = $\frac{1}{6}$ GF = $\frac{1}{6}$ CD

Eben ſo iſt Gb : GF = 2 : 6

woraus Gb = $\frac{2}{6}$ GF = $\frac{2}{6}$ CD ꝛc. ꝛc.

w. z. e. w.

Sollte eine Linie nach einem gewiſſen Verhältniſſe getheilt werden, z. B. in zwei Theile, die ſich wie 3 : 4 verhalten, ſo würde man auf die eben gezeigte Art verfahren, und die angenommene Linie in 3 + 4 = 7 Theile theilen, und ſodann drei Theile für den einen, und viere für den andern Theil annehmen.

Anmerkung. Hier gilt wieder, was ich ſchon früher bei anderer Gelegenheit erwähnt habe: daß die Theorie dieſer Auf-

Löſung völlig mathematiſch richtig iſt, in der Ausübung man ſich jedoch derſelben, wenn es auf große Genauigkeit ankömmt, nicht gut bedienen kann, ſondern beſſer thut, die Eintheilung mit dem ſogenannten Haarzirkel durch Verſuche zu machen.

§. 119. Fig. 107.

Wenn eine gegebene Linie in ſehr viel Theile, als 100, 1000 ꝛc. getheilt werden ſoll, ſo muß man einen ſogenannten geometriſchen Maßſtab verfertigen. Da nun bei einer genauen Zeichnung ſehr viel auf die Genauigkeit des Maßſtabes ankömmt, ſo will ich hier die Verzeichnung deſſelben, ſo gut als möglich iſt, auseinander ſetzen, den Gebrauch zeigen und die Richtigkeit erweiſen.

Wir wollen annehmen, die Länge der Linie AB ſolle in 1000 Theile getheilt werden. Man theile AB in zehn gleiche Theile, A 1; 1, 2; 2, 3; ꝛc. und errichte an den Endpunkten A und B ſenkrechte Linien mit der möglichſten Genauigkeit, jedoch noch von unbeſtimmter Länge. Nun trage man von A nach C zehn gleiche Theile von willkührlicher Länge auf, und ihre Summe, nämlich die ganze Länge AC, trage man von B nach D auf, und theile BD in zehn gleiche Theile. Wollte man hier ſogleich die einzelnen zehn Theile auftragen, ſo würde ſelten oder nie BD genau gleich AC werden. Jetzt vollende man das Parallelogramm ABCD, und prüfe ſeine Richtigkeit dadurch, daß man unterſucht, ob die Diagonalen AD und BC einander vollkommen gleich ſind. Iſt dies nicht der Fall, ſo iſt bei Errichtung der Senkrechten gefehlt worden und die Arbeit iſt unbrauchbar. Wenn jedoch genau AD = BC, ſo theile man auch CD genau in zehn gleiche Theile, und ziehe die Linien 100, 1; 200, 2; ꝛc. ꝛc.

Endlich theile man noch A 1 und C 100 in 10 gleiche Theile, und ziehe die ſchrägen Linien oder Transverſalen 100, 10; a 20, b 30, c 40 ꝛc. ſo iſt der Maßſtab vollendet.

Wäre nun das Ganze 10 Zoll, ſo wären ſolche hier in 1000 Theile getheilt, indem der letzte Zoll oder der zehnte Theil A 1 in 100 Theile getheilt iſt.

Sollen nun auf dieſem Maaßſtabe nur ganze Zolle und Zehntheile genommen werden, ſo kann dieſes nur auf der obern oder untern Linie geſchehen. So iſt z. B. die Linie von 500 bis $a = 4, 1$ Zoll; von 600 bis $b = 5, 2$; von 700 bis $c = 6, 3$; von 200 bis $d = 1, 4$ Zoll u. ſ. w.

Wenn aber von den ganzen Zollen auch noch Hunderttheile genommen werden ſollen, ſo kann dieſes nicht mehr auf der obern und untern Linie geſchehen, ſondern man muß mit dem Zirkel auf die übrigen Parallelen zwiſchen AB und CD gehen. So iſt z. B. $xy = 0, 01$ Zoll; $zu = 0, 02$ Zoll ꝛc. bis $\alpha\beta = 0, 09$ Zoll.

Sollte nun z. B. 3,05 Zoll genommen werden, ſo würde man die Linie Ek faſſen; denn EF iſt = 3 Zoll, und $FK = 0{,}05$, folglich $Ek = 3'' + 0{,}05'' = 3{,}05''$. Ferner iſt $Hl = 6{,}18''$; denn es iſt $HI = 6$, $Iq = 0{,}08$ und $ql = 100a = 0{,}1''$; folglich

$$HI + ql + Iq = 6 + 0{,}1 + 0{,}08 = 6{,}18'' = Hl$$

Die Richtigkeit hiervon erhellet aus folgender Betrachtung.

Es iſt $\triangle\, 100xy \backsim \triangle\, 100uz \backsim \triangle\, 100\alpha\beta$ ꝛc. $\backsim \triangle\, 100,1,10$; wegen der parallelen Linien.

Da nun vermöge der Conſtruktion

$$100x : 100,1; = 1 : 10$$

und auch $100x : 100,1; = xy : 1,10;$

ſo iſt auch $xy : (1,10;) = 1 : 10$

nämlich xy iſt $= \frac{1}{10}$ der Linie $(1,10)$; da nun $(1,10); = \frac{1}{10}$ Zoll, ſo iſt $xy = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}'' = \frac{1}{100}''$; da aber $A1 = 1$ Zoll, ſo iſt $xy = \frac{1}{100} \cdot A1$, nun iſt aber $A1 = \frac{1}{10} \cdot AB$, folglich $xy = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} AB = \frac{AB}{1000}$

Auf ähnliche Art kann nun auch erwieſen werden, daß uz = $\frac{2}{1000}$. AB, vw = $\frac{3}{1000}$. AB, u. ſ. w.

§. 120.

Der geometriſche Maßſtab wird ſodann, wenn ein größeres Maß (ſo wie es bei den meiſten Zeichnungen der Fall iſt) kleiner angenommen wird, ein verjüngter Maßſtab genannt. Man nimmt z. B. eine Ruthe auf der Zeichnung zu 5 Zoll an, ſo iſt dieſer Maasſtab, wornach man zeichnet, ein verjüngter Maßſtab.

Außerdem, daß dieſer Maßſtab bei jeder Zeichnung der Baukunſt, Artillerie, Fortifikation, Geographie, Topographie ꝛc. bald in dieſer, bald in jener Geſtalt unentbehrlich iſt, ſo gewährt er noch zu mancher geometriſchen Auflöſung gute Dienſte, wenn man die Conſtruktion einer gefundenen Gleichung nicht leicht findet.

Man ſoll z. B. zwiſchen zwei gegebenen Linien a und b zwei mittlere Proportionalen x und y finden.

Nämlich es ſoll a : x = y : b gefunden werden, ſo iſt laut Bedingung der Aufgabe

$$a : x = x : y$$

und $y = \frac{x^2}{a}$

Es ſoll aber auch

$x : y = y : b$ ſeyn

ſo iſt nun $x : \frac{x^2}{a} = \frac{x^2}{a} : b$

woraus $xb = \frac{x^4}{a^2}$

$$a^2 b = x^3$$

A) $\sqrt[3]{a^2 b} = x$

$$\text{und nun } y = \frac{(\sqrt[3]{a^2 b})^2}{a} = \frac{\sqrt[3]{a^4 b^2}}{a}$$

$$= \frac{a\sqrt[3]{a b^2}}{a} = \sqrt[3]{a b^2} \qquad (\mathfrak{B}$$

Man würde alſo, um mit Hülfe eines geometriſchen Maßſtabes x und y zu beſtimmen, die Längen von a und b davon abnehmen, und daraus x und y durch 𝔄 und 𝔅 finden.

Wäre z. B. nach dem Maßſtabe $a = 72$, $b = 333,3$ gegeben, ſo wäre

$x = \sqrt[3]{(72)^2 \cdot 333,3}$ und $y = \sqrt[3]{(333,3)^2 \cdot 72}$

wo man ſodann $x = 120$ und $y = 200$ ziemlich genau findet. Es iſt alſo ſodann

$$72 : 120 = 200 : 333,3$$

woraus $120 \cdot 200 = 24000$

$$72 \cdot 333,3 = 23997,6$$

wo alſo nur 2,4 an der Richtigkeit fehlen, welcher Fehler jedoch durch Ausziehung der Kubik-Wurzel mit mehreren Decimal-Stellen noch vermindert werden kann.

§. 121. Fig. 108.

Man ſoll auf einer Geraden DG ein △ zeichnen, welches einem gegebenen △ ABC ähnlich iſt.

Man trage den ∟ y = ∟ x, und ∟ n = ∟ m an D und G auf, verlängere die Schenkel, bis ſie ſich ſchneiden, ſo wird △ DEG ∾ △ ABC: weil, wenn zwei ∠ = ſind, es auch der dritte ſeyn muß.

Oder man nehme AC, AB und DG auf dem geometriſchen Maßſtabe, und ſuche zu dieſen Linien eine vierte Proportionale, ſo daß

$$AC : AB = DG : x$$

wo ſodann $x = \frac{AB \,.\, DG}{AC} = DF$ wird; mit dieſer Entfernung, welche ebenfalls vom Maßſtabe abgenommen wird, ſchlage man aus D den ⌒ ab, ferner ſuche man zu AC, CB und DG eine vierte Proportionale, ſo daß

$$AC : CB = DG : x$$

wo $x = \frac{DG \,.\, CB}{AC} = GE$ wird.

Mit der Entfernung von GE nach demſelben Maßſtabe kreuze man nun aus G den vorigen ⌒ ab, durch den ⌒ cd, und verbinde den Durchſchnittspunkt E mit D und G, ſo iſt

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEG$$

weil $AC : AB = DG : DE$
und $AC : BC = DG : GE$ ſtatt findet.

So wie man hier mit dem △ verfahren iſt, kann man auch mit allen übrigen Vielecken zu Werke gehen, wenn man ſolche nämlich durch Diagonalen in △△ zerlegt, und mit jedem △ insbeſondere wie mit dem obigen verfährt.

§. 122. Fig. 109.

Man ſoll die Länge einer geraden Linie AB auf dem Felde, welche nicht durch eine Kette oder Schnur von A nach B gemeſſen werden kann, finden.

Man nehme einen Punkt C nach Belieben, jedoch ſo an, daß man von C nach A und B ſehen und meſſen kann, und meſſe AC und BC, verlängere dann rückwärts die Linien, und trage AC von C nach E auf, ſo daß AC = EC. Eben ſo trage man BC rückwärts nach D auf, daß DC = BC, und meſſe nun DE: ſo iſt DE = AB; denn man hat ſowohl im △ ABC als DEC

zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Scheitel ∟ bei C, welche einander = ſind; folglich iſt auch DE = AB.

Sollte hinter dem Punkte C nicht hinlänglich Raum ſeyn, ſo kann man auch nur einen Theil von AC, z. B. $\frac{1}{2}$ AC, von C nach F, und $\frac{1}{2}$ BC von C nach I auftragen, wo ſodann auch IF = $\frac{1}{2}$ AB wird. Indem ſodann

AC : AB = CF : IF

und BC : AB = CI : IF

Und wenn hinter C gar kein Raum vorhanden wäre, ſo wird irgend ein Theil von AC vorwärts von C nach G, und eben ſo ein Theil von BC von C nach H aufgetragen; ſo wird ſodann, wenn CG = $\frac{1}{n}$ AC und CH = $\frac{1}{n}$ BC, auch GH = $\frac{1}{n}$ AB werden.

§. 123. Fig. 110.

Man ſoll die Linie AB meſſen, und kann dem Punkte B, eines Hinderniſſes halber, gar nicht beikommen.

Man errichte in A einen rechten ∟ und verlängere den Schenkel deſſelben willkührlich bis C, trage nun AC auf die noch weiter verlängerte Linie, ſo daß CE = AC werde. Nun errichte man abermals einen rechten ∟ und verlängere ſeinen Schenkel ſo weit, daß der Punkt D mit C und B in einer geraden Linie liegt: ſo wird DE = AB ſeyn.

Denn es iſt ∟ m = ∟ n, als Scheitel ∟

∟ p = ∟ q, als rechte

und auch AC = EC a. d. Conſtr.

Mithin △ ACB = △ DCE

und AB = DE

w. z. e. w.

Hier kann man ebenfalls wieder wie in voriger Aufgabe verfahren, wenn hinter C nicht hinlänglich Raum iſt, und ſodann den rechten Winkel in o, und wenn es auch hier der Raum nicht erlaubt, in s abſtecken.

Iſt in dieſen beiden Fällen

$CF = \frac{1}{n} AC$, ſo iſt auch $IF = \frac{1}{n} AB$

oder $GC = \frac{1}{n} AC$, ſo iſt auch $GH = \frac{1}{n} AB$.

§. 124. Fig. 111.

Aufgabe.

Man ſoll die Entfernung AB zweier Punkte A und B meſſen, welche ſo beſchaffen iſt, daß man ſich weder der Linie AB, noch den Punkten A und B nähern kann.

Auflöſung.

Die Auflöſung hiervon iſt nichts anders, als die Zuſammenſetzung der beiden vorigen Auflöſungen. Es wird nämlich der Punkt C willkührlich angenommen, und mit den Entfernungen AC und BC nach §. 123. verfahren, und durch rechtwinkliges Abgehen $HI = AC$ oder $\frac{1}{n} AC$, und $KL = BC$ oder $= \frac{1}{n} BC$ gefunden. Hat man dieſe Längen, ſo werden die Linien AC und BC rückwärts verlängert, ſo daß $DC = LK = BC$ oder $= \frac{1}{n} BC$

und $EC = HI = AC$ oder $= \frac{1}{n} AC$

werden. Es wird ſodann auch $DE = AB$ oder $= \frac{1}{n} AB$ werden.

§. 125. Fig. 112.

Aufgabe.

Man ſoll den Winkel ABC, zu welchem man nicht kommen kann, in zwei gleiche Theile theilen, oder, was daſſelbe iſt, ſeine Theilungslinie HB nach außen zu verlängern, ſo daß ∟ s = ∟ x werde.

Anmerkung. Es kömmt nämlich in der Fortifikation, beſonders aber beym Angriffe der Feſtungen oft vor, daß man, ohne ſich der angegriffenen Feſtung nähern zu können, dieſe Operation vornehmen muß. Da nun die Linie HB die Kapitale des Bollwerks IABCK heißt, ſo nennt man dieſes Verfahren: die Kapitale nach außen verlängern.

Auflöſung.

Man verlängere zuerſt die Linien (Geſichtslinien) AB und BC willkührlich, z. B. bis E und G, und meſſe BG und BE nach §. 123, und übrigens noch auf gewöhnliche Art GE. Nun ſuche man durch Rechnung zu (GB + BE), GE und GB eine vierte Proportional-Linie, und trage ſolche von G nach F auf: ſo iſt F der Punkt, wo die verlängerte Kapitale BH hin trifft, und man kann nun BF nach Belieben verlängern.

Beweis:

Um dieſes einzuſehen, denke man ſich GB verlängert, bis BD = BE werde, und D und E durch die Gerade DE verbunden: ſo iſt nun

(GB + BE) : GE = GB : GF a. d. E.

Da nun BD = BE

ſo iſt auch

(GB + BD) : GE = GB : GF

d. i. GD : GB = GE : GF

Folglich DE ⋕ BF

Deßhalb nun $\angle n = \angle s$ als äußere u. innere $\angle\angle$
und $\angle y = \angle n$ wegen d. = ſchenkl. $\triangle$
und auch $\angle x = \angle y$ als Wechſel $\angle\angle$.

alſo auch $\angle x = \angle s$

w. z. e. w.

Denn wenn durch FB der $\angle$ GBE in zwei gleiche Theile getheilt iſt, ſo iſt es auch der Scheitel $\angle$ daran, nämlich ABC.

Man kann dieſe Aufgabe auch auf folgende Art löſen.

Fig. 113.

Man verlängere, wie vorher, die Geſichtslinien BA und BC willkührlich, und nehme eben ſo in dieſen Verlängerungslinien die Punkte G und E an. Nun meſſe man den $\angle m$ und trage ſolchen an E auf, ſo daß $\angle n = \angle m$ werde. Ferner theile man den $\angle$ HEI in zwei gleiche Theile, daß $s = n + u$, verlängere die Theilungslinie bis in D und ziehe ED. Endlich theile man ED in zwei gleiche Theile in N, ſo iſt BN oder BF die geſuchte Theilungslinie, wie vorher.

Beweis:

$\left.\begin{array}{l}\angle n = \angle m \\ \angle (n + u) = \angle s\end{array}\right\}$ a. d. Conſtr.

alſo auch $\angle (m + u) = \angle s$

Es iſt aber auch

$\angle (m + u) = \angle r$ als äußerer

Mithin auch $\angle r = \angle s$

und deßhalb das $\triangle$ DBE gleichſchenklig, und $\angle y = \angle z$, weil $DN = EN$, a. d. C.

w. z. e. w.

§. 126.

Bevor ich zu den Berechnungen des Flächen-Inhal-

tes geradliniger Figuren übergehe, will ich vorher noch nachſtehende ſehr nützlichen und für die Folge unentbehrlichen Formeln entwickeln.

Fig. 114.

1) In einem willkührlichen △ ABC ſind alle drei Seiten bekannt, es wird aus dem Scheitel eine Linie auf die gegenüberſtehende Seite gefället, man ſoll die Länge der Abſchnitte AD und DB beſtimmen. Es ſey die eine Seite AC = a, BC = c, die Grundlinie AB = b, CD = y, DA = x, deßhalb DB = b — x.

$$\text{So iſt } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$\text{oder } y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (A$$

$$\text{Eben ſo iſt } CD = \sqrt{BC^2 - DB^2}$$

$$\text{oder } y = \sqrt{c^2 - (b - x)^2}$$

$$= \sqrt{c^2 - (b^2 - 2bx + x^2)}$$

$$= \sqrt{c^2 - b^2 + 2bx - x^2} \quad (B$$

Aus A und B folgt nun

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - b^2 + 2bx - x^2}$$

$$a^2 - x^2 = c^2 - b^2 + 2bx - x^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2bx$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} = x \quad (C$$

$$\frac{a^2 - c^2}{2b} + \frac{b^2}{2b} = x$$

$$\frac{(a + c)(a - c)}{2b} + \frac{b}{2} = x = AD \quad (C$$

Ferner iſt

$$b - x = b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

$$= \frac{2b^2 - a^2 - b^2 + c^2}{2b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$= \frac{(c+a)(c-a)}{2b} + \frac{b}{2} = BD \quad (D$$

C und D ſind alſo die beiden Ausdrücke für die geſuchten Abſchnitte.

Wir wollen ſogleich dieſe Formeln auf ein Zahlen-Beiſpiel anwenden, ſo wird ſich zugleich auch die Probe davon ergeben.

Es ſey $a = 150$, $b = 140$ und $c = 130$, ſo iſt

$$AD = \frac{(150+130)(150-130)}{280} + \frac{140}{2}$$

$$= \frac{280 \cdot 20}{280} + 70 = 20 + 70 = 90 = AD$$

Ferner iſt

$$BD = \frac{(150+130)(130-150)}{280} + \frac{140}{2}$$

$$= \frac{280 \cdot -20}{280} + 70 = -20 + 70 = 50 = BD$$

Da nun $BD + AD = AB$ und

$50 + 90 = 140 = b$,

ſo iſt hieran ſogleich zu erkennen, daß in der Rechnung kein Fehler vorgefallen iſt.

Fig. 114.

Ferner ſey in einem andern $\triangle$ $a = 9$, $c = 18$ und $b = 12$, ſo iſt hier

$$AD = \frac{(9+18)(9-18)}{24} + 6 = \frac{27 \cdot -9}{24} + 6$$

$$= \frac{9 \cdot -9}{8} + 6 = -\frac{81}{8} + 6$$

$$= -10\frac{1}{8} + 6 = -4\frac{1}{8};$$

daß hier eine negative Größe erſcheint, zeigt an, daß der ∟ z ſtumpf iſt, und die ! CD außerhalb des △ fällt.

Als Probe kann hier ebenfalls DB berechnet werden, und es muß $DB = AB + DA = 12 + 4\frac{1}{8} = 16\frac{1}{8}$ werden. Nämlich

$$DB = \frac{(9+18)(18-9)}{24} + 6 = \frac{27 \cdot 9}{24} + 6$$

$$= \frac{9 \cdot 9}{8} + 6 = \frac{81}{8} + 6$$

$$= 10\frac{1}{8} + 6 = 16\frac{1}{8}$$

Die in C und D gefundenen Formeln laſſen ſich nun leicht durch Worte ausdrücken; nämlich für C ſagt man:

Ein Abſchnitt AD auf der Grundlinie wird gefunden, wenn man das Produkt aus Summa und Differenz der beiden Seiten, welche die ! einſchließen, formiret, es durch die doppelte Grundlinie dividirt, und die halbe Grundlinie zu dieſem Quotienten addirt.

Die Formel D würde eben ſo ausgedrückt werden können; nur mit dem Unterſchiede, daß man in C von den einſchließenden Seiten, hinſichtlich der Differenz, die kleinere Seite von der größern, hier aber die größere von der kleinern abzieht.

Es iſt aber nichts weiter nöthig, als die Formel C zu haben, denn man darf nur das gefundene Reſultat von der gegebenen Grundlinie abziehen, um den andern Abſchnitt zu finden.

Erhält man durch C das Reſultat negativ, ſo iſt es, wie ſchon geſagt, ein Zeichen, daß das △ ſtumpfwinklig iſt; und in dieſem Falle wird ſodann, um D zu finden, das Reſultat von C zu der Grundlinie addirt.

§. 127. Fig. 114.

2) Es ſind alle drei Seiten eines △ gegeben, man ſoll die Höhe finden.

In A des vorigen §. war

$$y^2 = a^2 - x^2$$

hierin ſubſtituire man den Werth von x aus E, ſo iſt

$$y^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$$

$$y^2 = a^2 - \left(\frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{4b^2}\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2}}$$

Wenn man nun den Zähler dieſer Größe in Faktoren zerlegt, und aus dem Nenner die Wurzel zieht, ſo erhält man

$$y = \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \quad (K$$

Nun ſetze man die halbe Summe aller drei Seiten, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = s$, ſo iſt

$$a + b + c = 2s \quad (F$$

Ferner iſt $\frac{a+b+c}{2} - a = s - a$

$$\frac{a + b + c - 2a}{2} = s - a$$

$$\text{und } b + c - a = 2\,(s - a) \qquad (G$$

Eben ſo

$$\frac{a + b + c}{2} - b = s - b$$

$$\frac{a + b + c - 2b}{2} = s - b$$

$$a + c - b = 2\,(s - b) \qquad (H$$

Endlich

$$\frac{a + b + c}{2} - c = s - c$$

$$\frac{a + b + c - 2c}{2} = s - c$$

$$a + b - c = 2\,(s - c) \qquad (J$$

Nun ſubſtituire man die Werthe aus F, J, H und G in K, ſo erhält man

$$y = \frac{1}{2b}\sqrt{2s \,.\, 2\,(s-a) \,.\, 2\,(s-b) \,.\, 2\,(s-c)}$$

$$y = \frac{1}{2b}\sqrt{16 \,.\, s \,.\, (s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

$$y = \frac{4}{2b}\sqrt{s \,.\, (s-a) \,.\, (s-b) \,.\, (s-c)}$$

$$\text{L, } y = \frac{2}{b}\sqrt{s \,.\, (s-a) \,.\, (s-b)\,(s-c)}$$

Auch dieſe Formel läßt ſich leicht durch Worte auf folgende Art ausdrücken.

Wenn alle drei Seiten eines △ bekannt ſind, ſo findet man die Höhe deſſelben, wenn man die halbe Summe aller drei Seiten ſucht, hiervon ein Mal die 1ſte, dann die 2te und endlich die 3te Seite

abzieht; dieſe drei Differenzen mit einander und noch mit der halben Summe multiplizirt, aus dieſem Produkte die Quadrat-Wurzel zieht, ſolche durch 2 multiplizirt, und dieſes Produkt durch die Grundlinie dividirt.

Es ſey z. B., wie im vorigen §., $a = 150$, $b = 140$, $c = 130$, ſo iſt

$$s = \frac{150 + 140 + 130}{2} = \frac{420}{2} = 210$$

$s - a = 210 - 150 = 60$, $s - b = 210 - 140 = 70$, und $s - c = 210 - 130 = 80$, alſo

$$y = \frac{2}{140} \cdot \sqrt{210 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80}$$

$$= \frac{1}{70} \cdot \sqrt{70560000}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot 8400 = \frac{840}{7} = 120 = CD$$

Die oben entwickelte Formel C werden wir in der Folge wieder brauchen, um auch den Flächeninhalt eines △s aus ſeinen drei Seiten zu berechnen.

Anmerkung. Ob es ſchon recht gut und dienlich iſt, die vorzüglichſten Formeln auswendig zu wiſſen: ſo rathe ich doch Anfängern, ſich zuerſt die Entwickelung der Formeln gut einzuprägen, bevor ſie ſich gewöhnen, Formeln zu merken. Wer Formeln auswendig lernt und ihre Entwickelung vergißt, iſt verlaſſen, ſobald ihm die Formel nicht einfällt; wer ſich jedoch durch analytiſche Darſtellung die Formel gleich ſelbſt wieder herleiten kann, wird nie in Verlegenheit gerathen.

Es gibt zwar pedantiſche Lehrer, die entweder alles durch rein geometriſche Conſtruktionen abgeleitet haben wollen, oder verlangen, daß ihre Schüler Formeln auswendig wiſſen. Es leuchtet aber klar in die Augen, daß dieſes Verfahren, hinſichtlich der Conſtruktionen, ſchwieriger, und, was das Auswendiglernen der Formeln anbetrifft, höchſt unzulänglich und unſicher iſt.

Man kann eine Menge Auflöſungen durch Conſtruktion finden, und doch durch eine ungewohnte Aufgabe überraſcht werden und viel Zeit brauchen, ehe man auf die Conſtruktion verfällt; hat man aber die gewöhnlichen geometriſchen Sätze im Kopfe, und iſt gewohnt, ſich alles durch algebraiſche Darſtellung vorzulegen: ſo wird man, wenn ein anderer ſich noch lange auf ſeine Conſtruktion beſinnt, die Formel entwickelt haben, und mittelſt jedes geometriſchen Maßſtabes die Aufgabe löſen.

Von dem Flächen-Inhalte geradliniger Figuren.

§. 127. Fig. 115.

Der Flächen-Inhalt einer geradlinigen Figur wird ausgemeſſen, wenn man unterſucht, wie oft eine andere als Grundmaß oder Einheit angenommene Fläche darin enthalten iſt.

Gewöhnlich iſt dieſes Grundmaß ein Quadrat, deſſen Seiten bald einen Zoll, bald einen Fuß oder Ruthe, zuweilen auch eine Meile ꝛc. betragen.

Wenn nun die Seite des Quadrats a, nämlich EF, in der Länge AB des Rechtecks ABCD vier Mal, und in der Höhe BC zwei Mal enthalten iſt, ſo iſt der Flächen-Inhalt des Rechtecks $ABCD = 2 . 4 . EF^2 = 8\ a$; und wenn $EF = 1$ Zoll, ſo iſt $ABCD = 8$ Quadrat-Zoll.

Man wird dieſes ſehr leicht einſehen, wenn man ſich AB in vier gleiche und BC in zwei gleiche Theile theilt, und die gegenüberliegenden Theilungs-Punkte mit einander verbindet. Denn wenn $BG = EF$, $BH = EF$, ſo iſt auch, da a ein Quadrat ſeyn ſoll, $BGIH = a = EF^2$.

Daſſelbe leuchtet von KLIH, KLMN ꝛc. ein.

Es iſt alſo $ABCD = 2 . 4 . EF^2$; wäre nun EF

= 1 Zoll, ſo iſt ABCD = 2 . 4 . (1 Zoll)^2 = 8 Quadrat-Zoll.

§. 128. Fig. 115.

Nehmen wir nun EF = 1 EF an, ſo iſt AB = 4 EF, BC = 2 EF, und ABCD = 8 EF^2 = 2 EF . 4 EF = AB . BC.

Man findet alſo den Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man ſeine Grundlinie mit der Höhe multiplizirt.

Setzen wir den Flächen-Inhalt = s, die Grundlinie = g, die Höhe = h, ſo iſt s = gh, woraus $g = \frac{s}{h}$ und $h = \frac{s}{g}$ kömmt.

Man findet alſo auch die Höhe eines Rechtecks, wenn man ſeinen Flächen-Inhalt durch die Grundlinie, und die Grundlinie, wenn man den Flächen-Inhalt durch die Höhe dividirt.

Wäre z. B. die eine Seite eines Rechtsecks = 7′, und die andere = 9′, ſo iſt der Flächen-Inhalt s = 7 . 9 = 63□′ (Quadratfuß).

Oder es ſey s = 180□′, und die Höhe h = 20′, ſo iſt die Grundlinie $g = \frac{180'}{20} = 9'$ lang.

§. 129.

Aus den früheren Erklärungen iſt es bekannt, daß ein Quadrat nichts anders iſt, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe. Wäre alſo die eine Seite eines Quadrats = a, ſo iſt auch die andere = a, und der Flächen-Inhalt nach vorigem §.

A) $s = a . a = a^2$.

Man findet alſo den Flächen-Inhalt eines Quadrats, wenn man ſeine Seite mit ſich ſelbſt multiplizirt.

Aus A folgt nun $\sqrt{s} = a$,

d. i. man findet die Seite eines Quadrats, wenn man aus dem Flächen-Inhalte deſſelben die Quadrat-Wurzel zieht.

Wäre nun die Seite eines Quadrats = 10, ſo iſt $s = 10 \,.\, 10 = 100$.

Oder es wäre $s = 225$, ſo iſt $a = \sqrt{s} = \sqrt{225} = 15$, und $15 \,.\, 15 = 225$.

§. 130. Fig. 116.

Der Flächen-Inhalt eines Parallelogramms iſt gleich dem Produkte aus der Grundlinie, multiplizirt mit der Höhe; d. i. mit dem Abſtande der entgegengeſetzten Seiten. Nämlich es iſt ABED = AD . BC = AD . EF

Beweis:

Denn es iſt AD = BE } wegen des # gr.
AB = DE }

Da nun auch BC = EF als !! zwiſchen #

und auch ∠ x = ∠ y als rechte

ſo iſt auch △ ABC = △ DEF

---

und nun

BEDC + △ ABC = BEDC + △ DEF

---

d. i. ABED = CBEF

Da nun CBEF = CB . BE

ſo iſt auch ABED = CB . BE

---

und da BE = AD

---

folglich auch ABED = CB . AD

---

w. z. e. w.

§. 131. Fig. 117.

Der Flächen-Inhalt eines △ iſt gleich dem Produkte aus der halben Grundlinie, multiplizirt mit der Höhe; oder aus der halben Höhe, multiplizirt mit der Grundlinie; oder auch aus der Höhe und Grundlinie, getheilt durch 2.

Nämlich △ $ABC = \frac{1}{2} AC . BD = \frac{1}{2} BD . AC = \frac{AC . BD}{2}$.

Beweis:

Man vollende des Parallelogramm, d. h. man ziehe durch B zu AC eine Parallele, und mache BE = AC, ſo iſt ABEC ein Parallelogramm, und BC die Diagonale. Es iſt alſo ABEC = BD . AC nach §. 130. Da nun eine Diagonale ein Parallelogramm in zwei gleiche Theile theilt, ſo iſt auch

$$ABC = BEC = \tfrac{1}{2} ABEC$$

d. i. △ $ABC = \frac{1}{2} . ABEC$ (A

Da nun $ABEC = AC . BD$ (B

ſo iſt auch △ $ABC = \frac{1}{2} AC . BD$

wenn man den Werth von ABEC aus B in A ſubſtituirt.

w. z. e. w.

Da man nun bei einem rechtwinkligen △ die eine Kathete als Höhe und die andere als Grundlinie betrachten kann, ſo kann man auch ſagen: der Flächen-Inhalt eines rechtwinkligen △ iſt = dem Produkte aus beiden Katheten, dividirt durch 2.

§. 132. Fig. 118.

Der eben erwieſene Satz kann auch auf folgende Art ſehr deutlich dargethan und erwieſen werden.

Anmerk. Diejenigen, welche den vierten Band meines Lehrbuches nicht ſtudirt haben, laſſen dieſen §. gänzlich weg, weil er ohne jenen nicht verſtändlich ſeyn würde.

Man theile die Höhe des rechtwinkligen △s ABC in Gedanken in eine unendliche Anzahl gleicher Theile, und denke ſich die Theilungslinien und eben ſo die kleinen Senkrechten. Um ſich jedoch dieſe Darſtellung zu verſinnlichen, nehmen wir die Theile Am, mn, np, pq ꝛc. xB an; eben ſo die Theilungslinien me, nf, pg .... xy, und die Senkrechten er, fs, gt ..... yz, und denken uns, daß die Anzahl dieſer Theile unendlich ſey.

Benennt man nun die Höhe AB = a, und die Grundlinie BC = b, ſo iſt Am = mn = np = pq $= \frac{a}{oo}$, alſo

$$An = \frac{2a}{oo},\ Ap = \frac{3a}{oo},\ Aq = \frac{4a}{oo} \text{ ꝛc.}$$

und $Ax = \frac{(oo-1)a}{oo} = \frac{oo\,a}{oo} = a$

Ferner iſt AB : BC = Am : me oder

$$a : b = \frac{a}{oo} : me$$

$$\text{woraus } me = \frac{ab}{oo\,a} = \frac{b}{oo}$$

Eben ſo iſt

$$AB : BC = An : nf$$

$$a : b = \frac{2a}{oo} : nf$$

$$\text{woraus } nf = \frac{2ab}{oo\,a} = \frac{2b}{oo} \text{ ꝛc.}$$

Und endlich

$$AB : BC = Ax : xy$$

$$a : b = \frac{(oo - 1)a}{oo} : xy$$

woraus $xy = \frac{(oo-1)ab}{oo\,a} = \frac{(oo-1)b}{oo} = \frac{oo\,b}{oo} = b$

Nun iſt das Rechteck $mn = mn \cdot me = \frac{a}{oo} \cdot \frac{b}{oo}$

$= \frac{ab}{oo^2}$;

$ns = np \cdot nf = \frac{a}{oo} \cdot \frac{2b}{oo} = \frac{2ab}{oo^2}$;

Eben ſo iſt $pt = \frac{a}{oo} \cdot \frac{3b}{oo} = \frac{3ab}{oo^2}$ ꝛc.

Endlich iſt $xz = xy \cdot yz = \frac{a}{oo} \cdot b = \frac{ab}{oo} = \frac{oo\,ab}{oo^2}$

Nun ſey S die Summe aller dieſer Rechtecke, ſo iſt

$$s = \frac{ab}{oo^2} + \frac{2ab}{oo^2} + \frac{3ab}{oo^2} + \ldots\ldots\ldots \frac{oo\,ab}{oo^2}$$

$$s = \frac{ab}{oo^2}(1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots\ldots\ldots + oo)$$

Nun iſt aber nach Formel

$$s = (a + t)\frac{n}{2}$$

$$s = (1 + oo)\frac{oo}{2}$$

$= \frac{1}{2}\,oo^2$, weil 1 gegen oo verſchwindet.

Alſo $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots + oo) = \frac{oo}{2} \cdot oo$

$= \frac{1}{2} \cdot oo^2$; und nun

$$s = \frac{ab}{oo^2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot oo^2 = \frac{ab\,oo^2}{2\,oo^2} = \frac{ab}{2}$$

$$= \frac{AB \cdot BC}{2}$$ w. z. e. w.

Anmerk. Man muß ſich hier nicht irre machen laſſen, daß die kleinen △△ Ame, erf, fsg ꝛc. verloren zu gehen ſcheinen, da es eigentlich nicht der Fall iſt: denn wenn die Theile von $AB = oo$, ſo werden auch jene △△ ſo klein werden, daß ſie für nichts zu achten ſind, und man mit Recht

Ame = erf = fsg = ꝛc. = o ſetzen kann.

§. 133. Fig. 118.

Man kann auch an voriger Figur die herumbeſchriebenen Rechtecke ſummiren, und erhält daſſelbe Reſultat, worau zu ſchließen iſt

1) daß die Summe der herumbeſchriebenen der Summe der eingeſchriebenen Rechtecke völlig gleich iſt, und daß

2) die auf vorige Art weggefallenen △△, und die auf eben gedachte Art zugekommenen △△ für nichts zu achten ſind.

Beides iſt aber ſchon dadurch klar genug, wenn man denkt, daß die Rechtecke eine unendlich kleine Breite haben, mithin, wenn es möglich wäre, dieſe Eintheilung wirklich zu machen, ſolche noch ſchmäler ausfallen würden, als die feinſten Linien.

Um das Obige darzuthun, iſt wieder wie vorher $em = \frac{b}{oo}$, $nf = \frac{2b}{oo}$ ꝛc. $xy = b = BC$, wie vorher, und deßhalb

Rechteck $Ae = Am \cdot me = \frac{a}{oo} \cdot \frac{b}{oo} = \frac{ab}{oo^2}$

Rechteck $mf = mn \cdot nf = \frac{a}{oo} \cdot \frac{2b}{oo} = \frac{2ab}{oo^2}$ ꝛc. ꝛc.

und endlich

$$\text{Rechteck } xC = \frac{a}{oo} \cdot b = \frac{ab}{oo} = \frac{oo\,ab}{oo^2}$$

Man hat alſo wieder dieſelben Glieder obiger für s gefundenen Reihe, und wird alſo auch wieder daſſelbe Reſultat, nämlich

$$s = \frac{AB \cdot BC}{2} \text{ erhalten.}$$

Die eingeſchriebenen Rechtecke, von welchen wir ſo eben geſprochen haben, werden gewöhnlich Elemente des Flächen-Inhalts genannt.

§. 134. Fig. 119.

Der Flächen-Inhalt eines Trapezes iſt gleich dem halben Produkte aus der Summe beider parallel-laufenden Seiten, multiplizirt mit dem Abſtande derſelben.

Nämlich es iſt $ABCE = \left(\frac{AB + EC}{2}\right) FE$

oder $= \frac{AB + EC}{2} \cdot BD$

Beweis:

Denn es iſt $ABCE = \triangle ABE + \triangle BCE$

$$= \frac{AB \cdot FE}{2} + \frac{EC \cdot BD}{2}$$

und da $FE = BD$, als !! zwiſchen #

ſo iſt auch $ABCE = \frac{AB \cdot BD}{2} + \frac{EC \cdot BD}{2}$

$$= \frac{BD\,(AB + EC)}{2}$$

w. z. e. w.

§. 135. Fig. 120.

Der Flächen-Inhalt einer jeden geradlini-

gen vierſeitigen Figur iſt gleich dem hal=
ben Produkte aus einer Diagonale, mul=
tiplizirt mit der Summe der Abſtände
beider entgegengeſetzten Winkel.

Nämlich es iſt $ABCD = \frac{BD\,(AE + CF)}{2}$

Beweis:

Denn es iſt $ABCD = \triangle\, ABD + \triangle\, BCD$

$$= \frac{BD\,.\,AE}{2} + \frac{BD\,.\,CF}{2}$$

$$= \frac{BD\,(AE + CF)}{2}$$

w. z. e. w.

§. 136.

Der Flächen=Inhalt eines jeden regelmäßi=
gen Vielecks iſt gleich dem halben Pro=
dukte aus dem Umfange mit dem Radius
des eingeſchriebenen Kreiſes, oder, was
daſſelbe iſt, mit der ⊥, welche aus dem Mit=
telpunkte auf eine Seite gezogen wird.

Nämlich, wenn die Anzahl der Seiten = n, die Länge einer Seite = l, und der Umfang des ganzen Vielecks, nämlich n . l = u, der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes = a, ſo iſt der Flächen=Inhalt des Vielecks

$$s = \frac{au}{2} = \frac{l\,.\,n\,.\,a}{2}$$

Beweis:

Man denke ſich im Vielecke aus dem Mittelpunkte in jeden Vieleckswinkel gerade Linien gezogen, ſo wird dadurch das Vieleck in ſo viel gleiche △△ zertheilt, als Seiten ſind, welche alle die gleiche Höhe a und die gleichen Seiten des Vieleckes zur Grundlinie haben. Der

Flächen-Inhalt eines ſolchen Dreiecks iſt $= \frac{a \, . \, l}{2}$, und die Summe aller dieſer $\triangle\triangle = S = n \, . \, \frac{a \, . \, l}{2} = \frac{au}{2}$

w. z. e. w.

§. 137.

Wir haben früher Formeln für die Halbmeſſer der eingeſchriebenen Kreiſe oder der Senkrechten in den Vielecken entwickelt, mit deren Hülfe nun leicht auch ſolche Ausdrücke für den Flächen-Inhalt gefunden werden können.

So haben wir z. B. die Senkrechte im regelmäßigen Fünfecke durch die Seite $= b$ ausgedrückt gefunden.

$$a = \tfrac{1}{2} b \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}$$

mithin eins der vorerwähnten Dreiecke

$$= \tfrac{1}{2} b \, . \, \tfrac{1}{2} b \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}$$

und alle fünf der entſtandenen $\triangle\triangle$, nämlich

$$S = 5 \, . \, \tfrac{1}{4} b^2 \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{5}{4} b^2 \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}$$

Auf eine ähnliche Art findet man

Für das $\triangle$, $s = \tfrac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$

Für das $\square$, $s = b^2$

Für das Sechseck, $s = \tfrac{3}{2} b^2 \sqrt{3}$

Für das Achteck, $s = 2b^2 \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

Für das Zehneck, $s = \tfrac{5}{2} b^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ ꝛc. ꝛc.

Ich überlaſſe jedoch die eigentliche Entwickelung dieſer Ausdrücke dem Schüler ſelbſt, weil ſolche im Ganzen leicht iſt, wenn man das Vorhergehende verſtanden hat, und ſetze nur die Ausdrücke her, damit man die Richtigkeit des Gefundenen darnach prüfen kann.

§. 138. Fig. 121.

Den Flächen = Inhalt eines jeden unregelmäßigen Vielecks findet man, wenn man daſſelbe durch Diagonalen in lauter △△ zerlegt, jedes △ einzeln berechnet, und die Reſultate zuſammen addirt.

So iſt ABCDEFG

$$= \triangle BCD + \triangle BDE + \triangle ABE + \triangle AGE + \triangle GEF$$

$$= \frac{BD \,.\, CL}{2} + \frac{BD \,.\, EK}{2} + \frac{AE \,.\, BI}{2} + \frac{AE \,.\, GH}{2} + \frac{GF \,.\, EM}{2}$$

Die Rechnung kann etwas vereinfacht werden, wenn man die Grundlinien der △△ ſo nimmt, daß zwei △△ eine gemeinſchaftliche Grundlinie haben, ſo wie es hier bei BCD und BDE, und auch bei ABE und AGE der Fall iſt. So iſt nun

$$ABCDEFG = \frac{BD\,(CL + EK)}{2} + \frac{AE\,(BI + GH)}{2} + \frac{GF \,.\, EM}{2}$$

§. 139. Fig. 122.

Die Kreisfläche iſt gleich dem halben Produkte aus der Peripherie mit dem Halbmeſſer.

Nämlich wenn die Peripherie ABCA = p und AE = a, ſo iſt der Flächen = Inhalt des Kreiſes

$$s = \tfrac{1}{2}\,ap$$

B e w e i s:

Die Richtigkeit hiervon geht ſchon aus dem §. 136. hervor. Denn man denke ſich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von einer unendlichen Anzahl unendlich

kleiner Seiten, ſo iſt die Summe aller dieſer Seiten nichts anders, als die Peripherie; nämlich p iſt hier, was dort $n \cdot l = u$ war. Da nun übrigens auch die Senkrechte aus dem Mittelpunkte auf die Seite bei einer unendlichen Anzahl unendlich kleiner Seiten in den Halbmeſſer übergeht, ſo iſt auch hier a daſſelbe, was a in §. 136. war, folglich $s = \frac{1}{2} a \cdot p$

Für diejenigen, welche die Rechnung mit unendlichen Größen aus dem 4ten Theile dieſes Lehrbuches kennen, kann ſehr leicht dargethan werden, daß die Senkrechte im regelmäßigen Unendlicheck dem Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes gleich iſt.

Fig. 122.

Es ſey hier AC die Seite eines ſolchen Unendlichecks, ſo wird auch AC unendlich klein ſeyn und durch $\frac{1}{\infty}$ ausgedrückt werden können, weßhalb nun

$$AD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2 \cdot \infty}$$

Daher

$$AE = \sqrt{ED^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot \infty}\right)^2} = \sqrt{ED^2 + \frac{1}{4 \cdot \infty^2}}$$

Da nun das zweite Glied dieſes Ausdrucks, hinſichtlich des erſten verſchwindet, ſo iſt auch

$$AE = \sqrt{ED^2 + 0} = \sqrt{ED^2} = ED$$

w. z. e. w.

§. 140. Fig. 122.

Vermöge des Vorhergehenden kann man nun auch den Flächen-Inhalt eines Kreis-Abſchnittes und eines Kreis-Ausſchnittes, Halbkreiſes ꝛc. finden.

Sollte der Flächen-Inhalt des Kreis-Ausſchnittes EMBNE gefunden werden, ſo würde zuerſt der Flächen-Inhalt des Kreiſes geſucht und nun geſchloſſen: wie ſich

der Bogen von 360° zur Kreisfläche verhält, ſo auch der Bogen MBN zum Kreis-Ausſchnitt EMBNE.

Es ſey z. B. ⌒ MBN = 110°, und ME = a, die Peripherie = p, ſo iſt wie vorher $s = \frac{ap}{2}$, und nun

$$360° : s = 110° : EMBNE$$

$$\text{oder } 360° : \frac{ap}{2} = 110° : EMBNE$$

$$\text{woraus } EMBNE = \frac{ap \cdot 110}{720} = \frac{ap \cdot 11}{72}$$

Benennen wir allgemein die Anzahl der Grade des Bogens eines Kreis-Ausſchnittes = m, ſo iſt

$$EMBNE = \frac{a \cdot p \cdot m}{720}$$

Man findet alſo den Flächen-Inhalt des Kreis-Ausſchnittes, wenn man das Produkt aus der Peripherie und dem Radius noch mit der Anzahl Grade des gegebenen Bogens multiplizirt, und dieſes Produkt durch 720 dividirt.

Soll der Kreis-Abſchnitt MBNM berechnet werden, ſo muß außer dem ⌒ auch die Sehne MN bekannt ſeyn. Man berechnet ſodann den Kreis-Ausſchnitt vorher, und auch das △ MEN, und zieht Letzteres von jenem ab.

Wenn man den Flächen-Inhalt des Stückes OMNP der Zirkelfläche finden ſollte (OP mag durch den Mittelpunkt gehen oder nicht), ſo müſſen beide Sehnen, MN und OP, und auch beide ⌒⌒ MBN und OBP bekannt ſeyn. Man berechnet nun beide Abſchnitte, und zieht den kleinern von dem größern ab, ſo iſt der Reſt der Theil OMNP.

§. 141. Fig. 123.

Mit Hülfe der Rechnung mit unendlichen Größen läßt ſich auch auf eine ſehr leichte und faßliche Art erweiſen, daß die Kreisfläche = iſt dem halben Radius, multiplizirt mit der Peripherie.

Es ſey BD = CD = a, und BC ein ⌒, deſſen Länge = b: ſo theile man ſolchen in Gedanken in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner, gleicher Theile Ce, ef, fg ꝛc., ſo wird $Ce = \frac{b}{\infty}$, $ef = \frac{b}{\infty}$ ꝛc. werden.

Durch jene Eintheilung ſind aber nun eine unendliche Anzahl unendlich kleiner △△ entſtanden, deren Höhen wir Dk = a = dem Radius, und deren Grundlinien alle = $\frac{b}{\infty}$. Nun iſt ein jedes ſolches △ = $\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{\infty} = \frac{ab}{2 \cdot \infty}$, und da wir eine oo Anzahl ſolcher oo kleinen △△ haben, ſo iſt ihre Summe, nämlich der Ausſchnitt BCD, = $\infty \cdot \frac{ab}{2 \cdot \infty} = \frac{ab}{2}$.

Man kann alſo auch nun ſagen: der Flächen-Inhalt eines jeden Ausſchnitts iſt gleich der Länge des zugehörigen Bogens, multiplizirt mit dem halben Halbmeſſer.

Nimmt man nun den Bogen zu 360°, d. h. man ſetzt b = p = der ganzen Peripherie, und läßt dieſelbe Eintheilung in die oo Anzahl oo kleiner △△ ſtatt finden: ſo iſt, da oben BCD = $\frac{ab}{2}$, hier auch die Kreisfläche = $\frac{ap}{2}$ wie vorher.

§. 142.

Bevor ich über das in dieſem Abſchnitte Vorgetra-

gene Beiſpiele gebe, will ich erſt zeigen: wie man mit Hülfe der Rechnung des Unendlichen das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe durch Näherung finden kann.

Fig. 124.

Um dieſe Herleitung zu machen, errichte man auf dem Durchmeſſer DP den ſenkrechten Halbmeſſer CA, und ſchneide einen beliebigen ⌒ BA durch die ! Ordinate MB ab. Ferner ſuche man nun den ⌒ AB durch den Halbmeſſer und die Abſciſſe CM analytiſch auszudrücken, woraus ſich ſodann das Weitere leicht beſtimmen läßt.

Dieſer analytiſche Ausdruck wird erhalten, wenn man
1) das Stück CMBA der Kreisfläche, und
2) das △ CMB durch die Abſciſſe CM und den Halbmeſſer ausdrückt. Ferner
3) das △ CMB von CMBA abzieht, und endlich
4) den gefundenen Reſt durch den halben Halbmeſſer dividirt. Dieſes Letztere erhellet aus vorigem §.

Denn da nach ſolchem $CBA = \frac{\frown AB . AC}{2} = \frown AB \frac{AC}{2}$, ſo iſt auch $\frown AB = \frac{CBA}{\frac{1}{2} AC}$.

5) Setze man CM einem bekannten Theile des Halbmeſſers =, z. B. $CM = \frac{1}{2} CD$, ſo wird AB ein bekannter Theil des Umkreiſes, woraus ſich ſodann dieſer bekannte Theil und endlich der Umkreis ſelbſt zu jedem beliebigen Halbmeſſer finden läßt.

1) Es ſey der Halbmeſſer $CD = CB = a$, AC und BM ! CD, und $CM = x$. Wenn man ſich nun CM in eine oo Anzahl oo kleiner Theile getheilt denkt, und die Ordinaten cd, ef, mn ꝛc. gezogen würden, ſo iſt

$Cc = \frac{x}{oo}$, $cd^2 = a^2 - \frac{x^2}{oo^2}$, $cd = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{oo^2}}$ (A

$$Ce=\frac{2x}{oo},\ ef^2=a^2-\frac{2^2x^2}{oo^2},\ ef=\sqrt{a^2-\frac{2^2x^2}{oo^2}}\ )\mathfrak{B}$$

$$Cm=\frac{3x}{oo},\ mn^2=a^2-\frac{3^2x^2}{oo^2},\ mn=\sqrt{a^2-\frac{3^2x^2}{oo^2}}\ (\mathfrak{C}$$

ꝛc. ꝛc. und endlich

$$CM=x,\ MB^2=a^2-x^2,\ MB=\sqrt{a^2-x^2}\ .\ (\mathfrak{Z}$$

Wenn man nun alle dieſe Ordinaten 𝔄, 𝔅, ℭ ꝛc. 𝔷 mit $\frac{x}{oo}$ multiplicirt, ſo erhält man eine oo Anzahl oo kleiner Rechtecke, deren Summe den Theil der Zirkelfläche CMBA ausmachen.

Nämlich es iſt

$$CMBA=Cc.cd+ce.ef+em.mn+\ldots+qM.MB$$

$$\mathfrak{D})=\frac{x}{oo}\sqrt{a^2-\frac{x^2}{oo^2}}+\frac{x}{oo}\sqrt{a^2-\frac{2^2x^2}{oo^2}}$$

$$+\frac{x}{oo}\sqrt{a^2-\frac{3^2x^2}{oo^2}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{x}{oo}\sqrt{a^2-\frac{oo^2x^2}{oo^2}}$$

Hier iſt blos der Folge und der Gleichförmigkeit halber das zweite Glied der letzten Wurzelgröße, nämlich x^2 mit oo^2 multiplizirt, und auch oo^2 als Nenner untergeſetzt worden

Wenn man nun alle dieſe Wurzelgrößen nach § 322. IV. Theils auflöſet, ſo iſt für 𝔄

$$P=a^2,\ Q=-\frac{x^2}{a^2.oo^2},\ n=\tfrac{1}{2},\ \text{woraus}$$

$$\sqrt{a^2-\frac{x^2}{oo^2}}=a-\frac{x^2}{2a.oo^2}-\frac{1.x^4}{2.4.a^3.oo^4}$$

$$-\frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5.oo^6}-\frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7oo^8}-\ldots\ldots$$

Ferner iſt für B

$P = a^2$, $Q = -\frac{2^2 x^2}{a^2 . oo^2}$, $n = \frac{1}{2}$, woraus

$$\sqrt{a^2 - \frac{2^2 x^2}{oo^2}} = a - \frac{2^2 x^2}{2 a . oo^2} - \frac{1 . 2^4 x^4}{2 . 4 . a^3 . oo^4} - \frac{1 . 3 . 2^6 x^6}{2 . 4 . 6 . a^5 oo^6} - \ldots\ldots$$

Eben ſo findet man für C

$$\sqrt{a^2 - \frac{3^2 x^2}{oo^2}} = a - \frac{3^2 x^2}{2 . a . oo^2} - \frac{1 . 3^4 x^4}{2 . 4 . a^3 . oo^4} - \frac{1 . 3 . 3^6 . x^6}{2 . 4 . 6 . a^5 . oo^6} - \ldots\ldots$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc. und endlich für Z

$$\sqrt{a^2 - \frac{oo^2 x^2}{oo^2}} = a - \frac{oo^2 x^2}{2 . a . oo^2} - \frac{1 . oo^4 . x^4}{2 . 4 . a^3 oo^4} - \frac{1 . 3 . oo^6 . x^6}{2 . 4 . 6 . a^5 oo^6} - \ldots$$

Nun ſetze man die oben gefundenen Reihen in nachſtehender Form und Geſtalt unter einander, und multiplizire zugleich jedes Glied mit $\frac{x}{oo}$, ſo erhält man wieder die Reihe D; nämlich nun iſt

CMBA =

I.	II.	III.	IV.	V.	
$\frac{ax}{oo}$	$-\frac{x^3}{2.a.oo^3}$	$-\frac{1.x^5}{2.4.a^3 oo^5}$	$-\frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.oo^7}$	$-\frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.a^7.oo^9}$	$-\ldots$
$+\frac{ax}{oo}$	$-\frac{2^2 x^3}{2.a.oo^3}$	$-\frac{1.2^4.x^5}{2.4.a^3 oo^5}$	$-\frac{1.3.2^6.x^7}{2.4.6.a^5 oo^7}$	$-\frac{1.3.5.2^8.x^9}{2.4.6.8.a^7.oo^9}$	$-\ldots$
$+\frac{ax}{oo}$	$-\frac{3^2.x^3}{2.a.oo^3}$	$-\frac{1.3^4.x^5}{2.4.a^3.oo^5}$	$-\frac{1.3.3^6.x^7}{2.4.6.a^5.oo^7}$	$-\frac{1.3.5.3^8.x^9}{2.4.6.8.a^7.oo^9}$	$-\ldots$
$+\frac{ax}{oo}$	$-\frac{4^2.x^3}{2.a.oo^3}$	$-\frac{1.4^4.x^5}{2.4.a^3 oo^5}$	$-\frac{1.3.4^6.x^7}{2.4.6.a^5 oo^7}$	$-\frac{1.3.5.4^8.x^9}{2.4.6.8.a^7.oo^9}$	$-\ldots$
$+\ldots$	$-\ldots\ldots$	$-\ldots\ldots\ldots$	$-\ldots\ldots\ldots$	$-\ldots\ldots\ldots\ldots$	$-\ldots$
$+\frac{ax}{oo}$	$-\frac{oo^2.x^3}{2.a.oo^3}$	$-\frac{1.oo^4.x^5}{2.4.a^3.oo^5}$	$-\frac{1.3.oo^6.x^7}{2.4.6.a^5 oo^7}$	$-\frac{1.3.5.oo^8.x^9}{2.4.6.8.a^7.oo^9}$	$-\ldots$

Nun addire man die Vertikal = Kolumnen I — V, und zerfälle zugleich in Faktoren, ſo erhält man

$$\text{I)}\quad \frac{ax}{\infty} + \frac{ax}{\infty} + \frac{ax}{\infty} + \frac{ax}{\infty} + \dots\dots \frac{ax}{\infty}$$

$$\text{II)}\quad -\frac{1.x^3}{2.a.\infty^3}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\dots\infty^2)$$

$$\text{III)}\quad -\frac{1.x^5}{2.4.a^3.\infty^5}(1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\dots\infty^4)$$

$$\text{IV)}\quad -\frac{1.3.x^7}{2.4.6.a^5.\infty^7}(1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+\dots\infty^6)$$

$$\text{V)}\quad -\frac{1.3.5.x^9}{2.4.6.8.a^7.\infty^9}(1^8+2^8+3^8+4^8+5^8+\dots\infty^8)$$

= CMBA

Daß hier die Potenz von 1 nicht überall zugefügt worden, iſt ebenfalls der Folge und Gleichförmigkeit halber geſchehen, und iſt wohl leicht einzuſehen, daß, da 1 in jeder Potenz = 1 iſt, dieſe Potenzen in der erſten Horizontal-Reihe zugeſetzt werden konnten.

Da nun die Glieder jeder Reihe ∞ an der Zahl, ſo iſt auch die Summe der Reihe I.

$$\overset{\text{I}}{S} = \frac{ax}{\infty} \cdot \infty = ax$$

Um nun die übrigen in Klammern geſchloſſenen Potenz-Reihen zu ſummiren, muß man die im 343. §. des IV. Theils entwickelte Formel zur Hand nehmen; dort war $S = \frac{1}{m+1} \cdot \infty^{m+1}$ = der Summe einer unendlichen Reihe der m^{ten} Potenzen.

Hierdurch erhält man für II.

$$\overset{\text{II}}{S} = -\frac{x^3}{2.a.\infty^3} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot \infty^{2+1} = -\frac{x^3}{2.a.\infty^3}$$

$$\cdot \tfrac{1}{3} \cdot \infty^3 = -\frac{x^3\,\infty^3}{2.3.a.\infty^3} = -\frac{x^3}{2.3.a}$$

Ferner auf ähnliche Art für III.

$$\overset{III}{S} = -\frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot a^3 \cdot oo^5} \cdot \frac{1}{5} \cdot oo^5 = -\underbrace{\frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3}}$$

Eben ſo findet man

$$\overset{IV}{S} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5 \cdot oo^7} \cdot \frac{1}{7} \cdot oo^7 = -\underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5}}$$

und endlich

$$\overset{V}{S} = -\underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^7}}$$

Hätte man die Reihen weiter fortgeſetzt, ſo fände ſich

$$\overset{VI}{S} = -\underbrace{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^9}} \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

Es iſt alſo nun

$$CMBA = S + \overset{I}{S} + \overset{II}{S} + \overset{III}{S} + \overset{IV}{S} + \overset{V}{S} + \ldots$$

$$= ax - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot a} - \frac{1 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot a^5}$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot a^7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot a^9} - \ldots$$

2) Nun ſuche man den Inhalt des $\triangle BCM$. Hier iſt $\triangle BCM = \frac{MC \cdot BM}{2} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$ wenn man den Werth von BM aus 3 nimmt.

Dieſe Wurzelgröße muß nun ebenfalls nach der ſchon gebrauchten Formel des 322. §. entwickelt werden.

Auf dieſe Art findet man

$$\triangle BCM = \frac{x}{2}\left[a - \frac{x^2}{2a} - \frac{1 \cdot x^4}{2 \cdot 4 \cdot a^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot a^7} - \ldots - \ldots\right]$$

Alſo nun der Kreis-Ausſchnitt

3) BCA = CMBA − BCM

$$= \left[ax - \frac{x^3}{2.3.a} - \frac{1.x^5}{2.4.5.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.4.6.7a^5} - ..\right]$$

$$- \left[\frac{ax}{2} - \frac{x^3}{2.2.a} - \frac{1.x^5}{2.2.4.a^3} - \frac{1.3.x^7}{2.2.4.6.a^5} - ..\right]$$

Nun multiplizire man im Minuendus Zähler und Nenner jedes Gliedes durch 2, ſo erhält man BCA

$$= \frac{2.ax}{2} - \frac{2.x^3}{2.2.3.a} - \frac{1.2.x^5}{2.2.4.5.a^3} - \frac{1.2.3.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} - ..$$

$$- \frac{ax}{2} + \underbrace{\frac{x^3}{2.2.a}}_{a} + \underbrace{\frac{1.x^5}{2.2.4.a^3}}_{b} + \underbrace{\frac{1.3.x^7}{2.2.4.6..a^5}}_{c} - ..$$

Ferner multiplizire man von denen mit a, b, c bezeichneten Gliedern das erſte mit $\frac{3}{3}$, das zweite mit $\frac{5}{5}$, das dritte mit $\frac{7}{7}$ ꝛc., ſo iſt nun BCA

$$= \frac{2ax}{2} - \frac{2.x^3}{2.2.3.a} - \frac{1.2.x^5}{2.2.4.5.a^3} - \frac{1.2.3.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} - ..$$

$$- \frac{ax}{2} + \frac{3x^3}{2.2.3.a} + \frac{1.5.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.7.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + ..$$

woraus nun endlich durch Zuſammenfügen der Glieder

BCA

$$= \frac{ax}{2} + \frac{x^3}{2.2.3.a} + \frac{3.x^5}{2.2.4.5.a^3} + \frac{1.3.5.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + ..$$

4) Setzt man nun die Länge des Bogens AB = z, ſo iſt auch

$$BCA = \frac{BA.CA}{2} = \frac{az}{2} \text{ nach §. 141.}$$

Daher nun $\frac{az}{2}$

$$= \frac{ax}{2} = \frac{x^3}{2.2.3.a} + \frac{3.x^5}{2.2.4.5.a} + \frac{1.3.5.x^7}{2.2.4.6.7.a^5} + ..$$

Läßt man nun aus jedem Gliede dieſer Gleichung einen Factor 2 aus dem Nenner weg, ſo erhält man

$$az = ax + \frac{x^3}{2.3.a} + \frac{3x^5}{2.4.5.a^3} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^5} + \ldots$$

und dividirt nun alle Glieder durch a, ſo iſt

$$z = x + \frac{x^3}{2.3.a^2} + \frac{3x^5}{2.4.5.a^4} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7.a^6} + \ldots$$

5) Wenn man nun $x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}CD = CM$ ſetzt, ſo iſt nun

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1.a^3}{2.3.2^3.a^2} + \frac{1.3.a^5}{2.4.5.2^5.a^4} + \frac{1.3.5.a^7}{2.4.6.7.2^7.a^6} + \ldots$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2.3.2^3} + \frac{1.3.a}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5.a}{2.4.6.7.2^7} + \ldots$$

$$= a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots\right) \mathfrak{M}$$

Nun iſt aber $AB = z =$ (arcus) (arc.) $\frown 30°$ wenn $x = CM = \frac{1}{2} CD$ geſetzt wird.

Denn es iſt $CD = a$ und $CM = DM = \frac{1}{2}a$ } aus d. Conſt.

Da nun BM ! DC

Alſo △ DBC = ſchenklig und DB = BC

---

alſo $\frown DB = 60°$
und $\frown BA = 30°$, folglich

$$\text{arc. } 30° = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \text{wie in } \mathfrak{M} \ldots\ldots\right)$$

Alſo auch

$$12 . \frown 30^\circ = 12\,a \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \text{wie vorher} \ldots \right)$$

das iſt

$$\text{N)}\ \frown 360^\circ = 12\,a \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} + \ldots \right)$$

Wenn man nun des Geſetzes und der Folge wegen bei dem in Klammern ſtehenden Ausdrucke zum Nenner des erſten Gliedes den Factor 1 zufügt, ferner Zähler und Nenner des zweiten Gliedes ebenfalls noch mit 1, Zähler und Nenner des dritten mit 1.3, des vierten mit 1.3.5, des fünften mit 1.3.5.7 multiplizirt, ſo erhält die Reihe n folgende Geſtalt.

$$\frown 360^\circ = 12\,a \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1.1}{1.2.3.2^3} + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5.2^5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7.2^7} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.2^9} + \ldots \right)$$

Setzt man nun das erſte Glied $\frac{1}{2} = A$, ſo wird $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\,A$, mithin das zweite Glied $= \frac{1}{4}\,A . \frac{1.1}{2.3} = \frac{1}{48}$, welches nun $= B$ geſetzt wird.

Eben ſo iſt im dritten Gliede $\frac{1}{2.3.2^5} = \frac{1}{192} = \frac{1}{4} . \frac{1}{48} = \frac{1}{4} B$, wodurch nun das dritte Glied $= \frac{1}{4} B . \frac{3.3}{4.5}$ welches $= C$ geſetzt wird.

Durch ähnliche Unterſuchung erhält man das vierte Glied $= \frac{1}{4} C . \frac{5.5}{6.7}$ u. ſ. w., wodurch nun die letzte Reihe folgende Geſtalt bekömmt.

$$\frown 360^\circ = 12a\Big(\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{A} + \overbrace{\tfrac{1}{4}A \cdot \frac{1.1}{2.3}}^{B} + \overbrace{\tfrac{1}{4}B \cdot \frac{3.3}{4.5}}^{C}$$

$$+ \overbrace{\tfrac{1}{4}C \cdot \frac{5.5}{6.7}}^{D} + \overbrace{\tfrac{1}{4}D \cdot \frac{7.7}{8.9}}^{E} + \overbrace{\tfrac{1}{4}E \cdot \frac{9.9}{10.11}}^{F}$$

$$+ \overbrace{\tfrac{1}{4}F \cdot \frac{11.11}{12.13}}^{G} + \overbrace{\tfrac{1}{4}G \cdot \frac{13.13}{14.15}}^{H} + \ldots\Big)y$$

Wenn man nun alle dieſe Glieder in Dezimalbrüche verwandelt, und 11 Dezimalſtellen entwickelt, ſo iſt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= 0{,}50000000000 = A \\
+ \tfrac{1}{4}A \cdot \frac{1.1}{2.3} &= 0{,}02083333333 = B \\
+ \tfrac{1}{4}B \cdot \frac{3.3}{4.5} &= 0{,}00234375000 = C \\
+ \tfrac{1}{4}C \cdot \frac{5.5}{6.7} &= 0{,}00034877232 = D \\
+ \tfrac{1}{4}D \cdot \frac{7.7}{8.9} &= 0{,}00005933974 = E \\
+ \tfrac{1}{4}E \cdot \frac{9.9}{10.11} &= 0{,}00001092391 = F \\
+ \tfrac{1}{4}F \cdot \frac{11.11}{12.13} &= 0{,}00000211826 = G \\
+ \tfrac{1}{4}G \cdot \frac{13.13}{14.15} &= 0{,}00000042617 = H \\
+ \tfrac{1}{4}H \cdot \frac{15.15}{16.17} &= 0{,}00000008814 = I \\
+ \tfrac{1}{4}I \cdot \frac{17.17}{18.19} &= 0{,}00000001862 = K \\
+ \tfrac{1}{4}K \cdot \frac{19.19}{20.21} &= 0{,}00000000401 = L
\end{aligned}$$

$$+\tfrac{1}{4}L.\frac{21.21}{22.23} = 0,00000000087 = M$$

$$+\tfrac{1}{4}M.\frac{23.23}{24.25} = 0,00000000016 = N$$

$$+\tfrac{1}{4}N.\frac{25.25}{26.27} = 0,00000000004 = O$$

$$+\tfrac{1}{4}O.\frac{27.27}{28.29} = 0,00000000000 = P$$

$$= 0,52359877557$$
$$= 0,5235987756$$

wenn man die eilfte Ziffer wegläßt, und dafür die zehnte um eine Einheit vermehrt.

Folglich nun $\frown 360° = 12a.0,5235987756$.

Durch dieſen Ausdruck kann man nun für jeden angenommenen Halbmeſſer die zugehörige Peripherie finden. Am füglichſten iſt es, den Durchmeſſer eines Kreiſes = 1 zu ſetzen, ſo wird der Halbmeſſer $a = \frac{1}{2}$; bezeichnet man nun die zum Durchmeſſer 1 gehörige Peripherie durch π, ſo iſt

$$\pi = 12 . \tfrac{1}{2} . 0,5235987756$$
$$= 6 . 0,5235987756$$
$$= 3,1415926536.$$

So verhält ſich alſo der Durchmeſſer zu ſeinem Umkreiſe wie

1 : 3,1415926536

oder wie 10000000000 : 31415926536.

Dieſes Verhältniß iſt beinahe 7 : 22

und ziemlich genau 113 : 355.

Sehr bequem iſt es auch, wenn man von obigen Verhältniß-Zahlen nur die erſten drei Ziffern beibehält, und 100 : 314 annimmt.

Die Bequemlichkeit dieſes Verhältniſſes liegt darin, daß man erſtlich mit 100 leicht dividirt und multiplizirt, und, wenn man mit 314 multiplizirt, ſich nicht gut ver-

rechnen kann, weil das Produkt von 4 denen von 1 und 3 zuſammengenommen gleich iſt.

§. 143.

Bezeichnen wir nun im allgemeinen die Peripherie eines Kreiſes mit P, den Halbmeſſer mit a, und den Durchmeſſer mit d, ſo laſſen ſich nunmehr Ausdrücke für alle am Kreiſe vorkommende Fälle finden.

1) Iſt $1 : \pi = 2a : 2a\pi$

daher $P = 2a\pi$ (A

nämlich, jede Peripherie wird gefunden, wenn man den doppelten Halbmeſſer (Durchmeſſer) mit 3,14 . . . multiplizirt.

Alſo auch $P = d\pi$ (B

2) Iſt auch $\pi : 1 = P : d$

woraus $d = \frac{P}{\pi}$ (C

d. h. man findet zu einer gegebenen Peripherie den Durchmeſſer, wenn man erſtere durch 3,14 . . . dividirt.

So iſt auch $\pi : 1 = P : 2a$

$2a = \frac{P}{\pi}$ und $a = \frac{P}{2\pi}$ (D

und der Halbmeſſer wird aus der Peripherie gefunden, wenn man ſolche durch 2π dividirt.

3) Nach §. 139. iſt nun, wenn wir den Flächenraum der Kreisfläche mit S bezeichnen,

$S = \frac{a \cdot P}{2}$ (E

Iſt jedoch nur a bekannt, ſo muß der Werth von P aus A in E ſubſtituirt werden, und es iſt ſodann

$$S = \frac{a}{2} \cdot 2a\pi = \underbrace{a^2\pi} \qquad (F$$

Nämlich der Flächen-Inhalt eines Kreiſes wird gefunden, wenn man den Halbmeſſer zum □ erhebt und mit 3,14 . . . multiplizirt.

Soll jedoch der Flächenraum aus dem Durchmeſſer gefunden werden, ſo iſt da $a = \frac{d}{2}$, $a^2 = \frac{d^2}{4}$, mithin

in F $$S = a^2\pi = \underbrace{\frac{d^2\pi}{4}} \qquad (G$$

und man findet daher den Flächenraum des Kreiſes aus dem Durchmeſſer, wenn man das Quadrat davon mit 3,14... multiplizirt und das Produkt durch 4 dividirt.

4) Soll aus der Kreisfläche der Halbmeſſer gefunden werden, ſo kann dieſes vermöge F geſchehen; dort iſt

$$S = a^2\pi$$

und $$\underbrace{\sqrt{\frac{S}{\pi}} = a} \qquad (H$$

Man findet alſo aus dem Flächen-Inhalte den Halbmeſſer, wenn man erſtern durch 3,14.. dividirt, und aus dem Quotienten die Quadrat-Wurzel zieht.

Eben ſo iſt in G

$$S = \frac{d^2\pi}{4}$$

woraus $$\underbrace{\sqrt{\frac{4S}{\pi}} = d} \qquad (I$$

und man findet den Durchmeſſer aus dem Flächenraume, wenn man dieſen mit 4 multipli-

zirt, das Produkt durch 3,14... dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

5) Iſt ferner der Flächenraum durch die Peripherie zu finden, ſo iſt in E

$$S = \frac{a \,.\, P}{2}$$

Da nun in D, $a = \frac{P}{2\pi}$

ſo iſt nun $S = \frac{P}{2} \,.\, \frac{P}{2\pi} = \frac{P^2}{4\pi}$ (K

Man findet alſo aus der Peripherie den Flächen-Inhalt, wenn man erſtere zum Quadrat erhebt, und durch den vierfachen Werth von 3,14.... dividirt.

6) Endlich kann die Formel K noch dahin verändert werden, daß man aus dem Flächen-Inhalte eines Kreiſes die Peripherie beſtimmt; nämlich aus K iſt

$$\sqrt{4S\pi} = P \quad (L$$

Und es wird daher aus dem Flächen-Inhalte eines Kreiſes die Peripherie gefunden, wenn man erſtere mit dem vierfachen Werthe von 3,14... multiplizirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel zieht.

Wir werden weiter hinten wirkliche Beiſpiele in Zahlen geben, um den Gebrauch jener Formeln noch deutlicher zu zeigen.

§. 144.

Wenn man von der Zahl $\pi = 3{,}1415926536\ldots.$ den Logarithmus ſucht, ſo kann man auch für logarithmiſche Berechnungen ſich Formeln entwickeln. Es iſt nämlich

$$\log \pi = 0{,}4971499$$

Da nun $P = 2a\pi$, ſo iſt

$$\log P = \log 2a + 0{,}4971499 \;..\; (A \text{ oder}$$
$$\log P = \log d + 0{,}4971499 \;..\; (B$$

Aus A folgt nun

$$\log P - 0{,}4971499 = \log 2a \;..\; (C \text{ und}$$
$$\log P - 0{,}4971499 = \log d \;..\; (D$$

Ferner da $S = a^2\pi$, ſo iſt auch

$$\log S = 2 \log a + 0{,}4971499 \;.\; (E$$
und $\log S - 0{,}4971499 = 2 \log a$

d. i. $\frac{1}{2} \log S - 0{,}2485749 = \log a$ (F

Auch war $S = \dfrac{d^2\pi}{4}$

daher $\log S = 2 \log d + 0{,}4971499 - \log 4$ (G

In H war $a = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

wodurch $\log a = (\log S - 0{,}4971499) : 2$

$$\log a = \tfrac{1}{2} \log S - 0{,}2485749$$

welches daſſelbe iſt, was wir in Formel F erhalten haben.

In J war $d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}$

alſo $\log d = (\log 4S - 0{,}4971499) : 2$

und $\log d = \frac{1}{2} \log 4S - 0{,}2485749$ (H

ꝛc. ꝛc.

Zum Schluſſe dieſes §. will ich noch einige Logarithmen herſetzen, welche öfters bei Berechnungen vorkommen.

1) $\log 2\pi = 0{,}7981799$
2) $\log \pi^2 = 0{,}9942999$
3) $\log \sqrt{\pi} = 0{,}2485749$
4) $\log \dfrac{1}{\pi} = 0{,}5028501 - 1$

5) $\log 4\pi = 1,0992099$

6) $\log \frac{1}{4\pi} = 0,9007901 - 2$

7) $\log \frac{\pi}{2} = 0,1961199$

8) $\log \frac{\pi}{4} = 0,8950899 - 1$

9) $\log \frac{\pi}{3} = 0,0200286$

10) $\log \frac{\pi}{6} = 0,7189986 - 1$

§. 145.

Aus der Reihe Y ſieht man, daß ſie in das Unendliche fortgeſetzt werden kann, weßhalb man auch den vollkommen genauen Umkreis nicht beſtimmen, und den Flächen-Inhalt des Kreiſes nicht vollkommen quadriren kann. Da aber dieſe Reihe ſehr ſchnell zuſammen läuft, ſo läßt ſich ihre Summe durch Annäherung ſo genau finden, als es nöthig iſt; weßhalb auch der Umkreis zu jedem Halbmeſſer, und auch der Flächen-Inhalt des Kreiſes, ſo genau als es nur immer erforderlich iſt, gefunden wird.

Setzt man die Reihe Y fort, und entwickelt noch mehrere Glieder auf die gezeigte Art, verſteht ſich auch mit ſo viel mehr Dezimalſtellen, ſo erhält man

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$
$41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164$
$06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 70679\ 82148$
$08651\ 32823\ 06647\ 09384\ 46095\ 50582\ 26136.$

Das erſte gefundene Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe, nämlich 7 : 22, wollen einige dem Archimedes zuſchreiben; das genauere 113 : 355 hat ein gewiſſer Adrian Metius gefunden. Später berechnete Vieta die erſten 10 Dezimal-Ziffern der obigen Reihe;

auf ihn folgte Ludolph von Ceulen (gewöhnlich und fälſchlich Lud. v. Cölln genant), und berechnete die ganze erſte Zeile der obigen Reihe, nämlich 3,141....0288 und endlich Lagny die ganze obige Reihe bis auf die letzten dreizehn unterſtrichenen Ziffern, welche wir in Vega's Vorleſungen zugefügt und durchſtrichen finden; ich ſchließe hieraus, da Vega weiter nichts davon erwähnt, daß er ſelbſt dieſe 13 Ziffern noch berechnet hat.

Wie man früher verfuhr, ehe man die Rechnung des Unendlichen kannte, habe ich ſchon ein Mal erwähnt. Man findet nämlich die Annäherung zu dem Werthe von π ebenfalls, wenn man die Umfänge zweier regelmäßigen Vielecke von einer gleichen und ziemlich großen Anzahl Seiten berechnet; deren eins in einen gegebenen Kreis eingeſchrieben, und das andere herum beſchrieben iſt. Es wird ſodann die halbe Summe dieſer beiden Umfänge wenig vom Umkreiſe entfernt ſeyn, da der Umfang des eingeſchriebenen Vielecks von einer großen Anzahl Seiten wenig kleiner, und der Umfang des herumbeſchriebenen wenig größer, als der Umfang des gegebenen Kreiſes iſt. Das 96 Eck, und noch beſſer das 192 Eck kann dazu dienen, da man die Seite dieſes Vielecks aus dem Halbmeſſer berechnen kann.

Das Verhältniß 7 : 22 iſt genau genug, wenn es nicht auf $\frac{1}{100}$, und 113 : 355, wenn es nicht auf $\frac{1}{10000000}$ ankömmt.

§. 146.

Beiſpiele über die Berechnung der Flächen-Inhalte geradliniger Figuren.

1) Man ſoll den Flächen-Inhalt S eines Dreiecks finden, deſſen Grundlinie G = 3,36', und deſſen Höhe H = 2,24'; ſo iſt

$$S = \frac{G . H}{2} = \frac{2,24 . 3,36}{2} = 1,12 . 3,36$$

$$= 3,7632 \text{ Quadratfuß } (\square').$$

2) Der Flächen-Inhalt eines Dreiecks iſt 720□', ſeine Höhe 20', man ſoll die Grundlinie finden: ſo iſt

$$720 = \frac{20 \cdot G}{2}$$

$$1440 = 20\ G$$

$$72' = G$$

Probe $\frac{72 \cdot 20}{2} = 72 \cdot 10 = 720$

3) Es ſind die drei Seiten eines Dreiecks, nämlich $a = 60$, $c = 40$ und die Grundlinie $b = 50$, gegeben, man ſoll die Höhe des Dreiecks und den Flächen-Inhalt beſtimmen.

Hier wird nach der Formel L §. 126. verfahren, wenn man nicht die dort gezeigte Rechnung hier mit den gegebenen Zahlen von neuem vornehmen will. Jene Formel war

$$H = \frac{2}{b}\sqrt{S.(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

wo $a = 60$, $c = 40$ und $b = 50$ iſt. Ferner iſt

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+50+60}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

Alſo $s-a = 15$, $s-b = 25$, $s-c = 35$

und nun $H = \frac{2}{50}\sqrt{75 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35}$

$$= \frac{1}{25}\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}$$

Man wird hier nämlich ſehr kurz weg kommen, wenn man gar nicht multiplizirt, ſondern in Factoren zerfället, und ſo die Wurzel zieht. Es iſt nämlich nun

$$H = \frac{1}{25}\sqrt{(5)^2 \cdot (5)^2 \cdot (5)^2 \cdot (3)^2 \cdot 7}$$

$$= \frac{5.5.5.3}{5.5} . \sqrt{7} = 15\sqrt{7} = 15 . 2{,}645 \ldots.$$

$$= 39{,}675 = H$$

Alſo nun $S = \frac{G.H}{2} = \frac{50 . 39{,}675}{2}$

$$= 25 . 39{,}675 = 991{,}875 \ldots . \square'$$

Man kann jedoch, wenn man die Höhe nicht braucht, noch kürzer fertig werden, wenn man mit der Formel L noch eine kleine Veränderung vornimmt, und ſie ſogleich als Formel für den Flächen-Inhalt brauchbar macht.

Nämlich es iſt

$$S = \frac{G.H}{2} = \frac{G}{2} . \frac{2}{b} . \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{b.2}{2.b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = S$$

Es gibt nämlich jene Formel ohne den Wurzel-Coefficienten $\frac{2}{b}$ ſogleich den Flächen-Inhalt eines Dreieckes aus deſſen gegebenen drei Seiten. So iſt nun

$$S = \sqrt{75 . 15 . 25 . 35}$$

$$= \sqrt{5.5.3.3.5.5.5.5.7} = 5.5.5.3\sqrt{7}$$

$$= 375\sqrt{7} = 375 . 2{,}645 =$$

$= 991{,}875$ wie vorher.

4) Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks iſt = 5, die zweite = 12, man ſoll die Hypothenuſe und den Flächen-Inhalt beſtimmen. Es ſey die Hypothenuſe = x, ſo iſt

$$x^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$$

und $x = \sqrt{169} = 13$

Ferner iſt $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 5 \cdot 6 = 30$

5) Die Hypothenuſe eines rechtwinkligen Dreieckes iſt = 25, die eine Kathete = 24, die andere = x; man ſoll den Flächen-Inhalt finden.

So iſt $x = \sqrt{(25)^2 - (24)^2} = \sqrt{625 - 576}$
$= \sqrt{49} = 7$

und nun $S = \frac{7 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 12 = 84$

6) Der Flächen-Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks iſt 210, die eine Kathete 20; man ſoll die andere Kathete x und die Hypothenuſe y finden.

ſo iſt $210 = \frac{x \cdot 20}{2} = x \cdot 10$

$21 = x$

Alſo nun $y = \sqrt{(21)^2 + (20)^2} = \sqrt{441 + 400}$
$= \sqrt{841} = 29$

7) Die Seite eines Quadrats iſt 4,242641′..... wie iſt der Flächen-Inhalt. Hier iſt
$S = (4,242641..)^2 = 18 \square'$

8) Der Flächen-Inhalt eines Quadrats iſt 550□′; wie iſt eine Seite deſſelben. So iſt

$\sqrt{S} = \sqrt{550} = 23,45208...$ = der geſuchten Seite.

9) Die eine Seite eines Rechtecks iſt 7,1′, die andere 3,1′; wie iſt der Flächen-Inhalt?
$S = 3,1 \cdot 7,1 = 22,01 \square'$

10) Der Flächenraum eines Rechtecks beträgt 3409□′, die eine Seite 487′; wie lang iſt die andere Seite?

Die andere Seite ſey = l, ſo iſt

$$l = \frac{3409}{487} = 7'$$

11) Die Länge eines Parallelogramms beträgt 227', der Abſtand beider ſo langen Seiten von einander 11'; wie iſt der Flächen-Inhalt deſſelben?

Hier iſt $S = 11 \cdot 227 = 2497 \square'$

Anmerkung. So wie im Beiſpiele Nro. 10. wird auch hier aus dem Flächen-Inhalte und der Seite der Abſtand, oder aus Abſtand und Flächen-Inhalte die Seite gefunden.

12) Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks l iſt = 10; man ſoll deſſen Flächen-Inhalt finden.

Hier iſt l = a = dem Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes. Die Senkrechte s in einem △ aber, deren das Sechseck 6 enthält, wenn man nach früher gezeigter Entwickelung verfährt, = $\frac{1}{2}$ a $\sqrt{3}$; alſo hier

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot 10 \sqrt{3}' = 5 \cdot 1{,}732' \ldots = 8{,}66';$$ daher

$$S = \frac{6 \cdot s \cdot l}{2} = 3 \cdot s \cdot l = 3 \cdot 10 \cdot 8{,}66 = 259{,}8 \square'$$

13) Die Seite eines regelmäßigen Zwölfecks l iſt = 8; es ſoll der Flächen-Inhalt gefunden werden. Hier iſt ebenfalls, nach früherer Entwickelung, die Senkrechte oder der Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes

$$s = \tfrac{1}{2} l \, (2 + \sqrt{3}).$$ Mithin

$$S = \frac{12 \cdot l \cdot \frac{1}{2} l \, (2 + \sqrt{3})}{2} = 6 \cdot 8 \cdot 4 \, (2 + \sqrt{3})$$
$$= 6 \cdot 8 \cdot 4 \, (2 + 1{,}732 \ldots) = 6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3{,}732 \ldots$$
$$= 716{,}544 \square' \ldots$$

14) Der Flächen-Inhalt S eines regelmäßigen Achtecks iſt = 308,992 □'', die Seite l = 8; man ſoll die Senkrechte eines Dreiecks, deren 8 vorhanden ſind, oder den Radius des eingeſchriebenen Kreiſes ſuchen. Hier iſt, wenn wir den geſuchten Radius a nennen,

$$S = \frac{8 \cdot a \cdot l}{2} = 4 \cdot a \cdot l$$

$$\frac{S}{4\,l} = a$$

$$\text{Daher } a = \frac{308,992}{32} = 9,656'' \ldots.$$

Probe. Durch die mehr erwähnte und früher gezeigte analytiſche Entwickelung findet man die Senkrechte im Achteck $s = \frac{1}{2}\,l\,(1 + \sqrt{2})$; alſo hier $\frac{1}{2} \cdot 8\,(1 + \sqrt{2}) = 4\,(1 + \sqrt{2}) = 4\,(1 + 1,414 \ldots) = 4 \cdot 2,414 \ldots. = 9,656 \ldots$ wie oben.

15) Der Durchmeſſer eines Kreiſes iſt $d = 24''$; man ſoll die Peripherie $= P$ und den Flächen-Inhalt $= S$ finden.

So iſt $1 : 3,14 = 24 : P$

woraus $P = 24 \cdot 3,14 = 75,36$

$$\text{Alſo nun } S = \frac{d \cdot P}{4} = \frac{75,36 \cdot 24}{4} = 75,36 \cdot 6 = 452,16\,\square''$$

16) Der Halbmeſſer eines Kreiſes ſey $r = 15'$; man ſoll die Peripherie und den Flächen-Inhalt ſuchen.

So iſt $1 : 3,14 = 2 \cdot 15 : P$

$1 : 3,14 = 30 : P$

woraus $P = 30 \cdot 3,14 = 94,20 = 94,2$

$$\text{Alſo nun } S = \frac{r \cdot P}{2} = \frac{15 \cdot 94,2}{2} = 15 \cdot 47,1 = 706,5\,\square'$$

17) Die Peripherie eines Kreiſes ſey $= 300'' = P$; man ſoll ihren Flächen-Inhalt finden.

So iſt $\pi : 1 = P : d$

d. i. $314 : 100 = 300 : d$

$$\text{woraus } d = \frac{30000}{314} = 95,5''$$

und nun

$$S = \frac{300 \cdot 95,5}{4} = 75 \cdot 95,5 = 7162,5 \,\square''$$

18) Der Flächen-Inhalt eines Kreiſes beträgt 314 □''; man ſoll deſſen Peripherie und Durchmeſſer finden. Hier iſt

$$1 : \pi = d : d\pi$$

$$P = d\pi$$

$$S = d\pi \cdot \frac{d}{4} = \frac{d^2 \pi}{4} = 314$$

woraus $d^2\pi = 1256$

$$d^2 = \frac{1256}{3,14} \text{ und endlich}$$

$$d = \sqrt{\frac{125600}{314}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 314}{314}} = \sqrt{400} = 20''$$

und $P = d\pi = 20 \cdot 3,14 = 62,8''$

19) Es ſoll der Flächen-Inhalt S^{I} eines Kreis-Ausſchnittes gefunden werden, deſſen Bogen = 60°, und der Radius des zugehörigen Kreiſes 10'' beträgt.

So iſt $1 : 3,14 = 2 \cdot 10 : P$

$$P = 20 \cdot 3,14 = 62,8''$$

$$\text{und } S = \frac{62,8 \cdot 10}{2} = \frac{628}{2} = 314 \,\square' \ldots$$

endlich iſt

$$360° : 60° = 314 \,\square'' : S^{\text{I}}$$

$$\text{woraus } S^{\text{I}} = \frac{314 \cdot 60}{360} = \frac{314}{6} = 52,33 \,\square' \ldots\ldots$$

Fig. 125.

20) Man ſoll den Flächen-Inhalt eines Kreis-Abſchnittes finden, deſſen Bogen 50°, die Sehne AC =

20,3″ und der Radius des zugehörigen Kreiſes AD = 24″ beträgt.

Zuerſt wird wieder wie in voriger Aufgabe verfahren. Es ſey der Flächen=Inhalt des ganzen Kreiſes = S
" " Kreis=Ausſchnitts = S^{I}
" " Kreis=Abſchnitts = S^{II}

So iſt I) $100 : 314 = 48 : P$

$$\text{woraus } P = \frac{48 \cdot 314}{100} = \frac{15072}{100} = 150{,}72''$$

$$\text{und nun } S = \frac{24 \cdot 150{,}72}{2} = 12 \cdot 150{,}72 = \underbrace{1808{,}64 \,\square''}$$

Ferner iſt II) $360^\circ : 50^\circ = 1808{,}64 \,\square'' : S^{I}$

$$\text{woraus } S^{I} = \frac{5 \cdot 1808{,}64}{36} = \frac{5 \cdot 452{,}16}{9}$$

$$= \frac{2260{,}8}{9} = \underbrace{251{,}2 \,\square''}$$

Endlich iſt III) $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2}$

$$\text{d. i. } x = \sqrt{(24)^2 - (10{,}15)^2} = \sqrt{576 - 103}$$

$$= \sqrt{473} = \underbrace{21{,}7''} = DE$$

$$\text{und nun } \triangle ACD = \frac{AC \cdot DE}{2} = \frac{20{,}3 \cdot 21{,}7}{2}$$

$$= 10{,}15 \cdot 21{,}7 = \underbrace{220{,}25 \,\square''} = \triangle ACD$$

$$\text{Daher nun } S^{II} = S^{I} - \triangle ACD = 251{,}2 - 220{,}25$$

$$= \underbrace{30{,}95 \,\square''}$$

Dieſe Aufgabe kann gelöſet werden, wenn blos der Bogen und der Halbmeſſer gegeben ſind; ſie gehört jedoch ſodann in das Gebiet der Trigonometrie und nicht hierher.

Fig. 121.

21) Es ſey

BD = 30, CL = 10, KE = 15

$AE = 20,\ BI = 15,\ HG = 24$
$GF = 24,\ EM = 18$
man ſoll den Flächen-Inhalt finden.

Hier iſt

$$S = \frac{BD\,(CL + KE)}{2} + \frac{AE\,(BI + GH)}{2} + \frac{GF \,.\, ME}{2}$$

$$= \frac{30\,(10 + 15) + 20\,(15 + 24) + 24 \,.\, 18}{2}$$

$$= 15 \,.\, 25 + 10 \,.\, 39 + 24 \,.\, 9$$

$$= 375 + 390 + 216 = 981 = S.$$

§. 147.

Bevor ich das Kapitel von der Berechnung des Flächen-Inhalts beſchließe, iſt es wohl nöthig, noch etwas über das rein-arithmetiſche derſelben, nämlich über die Rechnung mit Ruthen, Fuß (Schuh), Zoll, Linien, Punkten ꝛc. zu ſagen.

Dieſe Rechnung zerfällt in die mit zehntheiligem oder Dezimal-Maß, und in jene mit zwölftheiligem oder Duodezimal-Maß.

Wir wollen zuerſt die leichtere, nämlich die Rechnung mit Dezimal-Maß, vornehmen.

Zu dieſer Rechnung iſt eine Längenruthe (°) = 10 Längenfuß (′), 1′ = 10 Längenzoll (″), 1″ = 10 Längenlinien (‴), 1‴ = 10 Längenpunkte oder Scrupel (⁗). Noch kleinere Theile werden gewöhnlich in Dezimal-Brüchen von Punkten ausgedrückt. Nämlich

$1^{\circ} = 10'$; $1' = 10''$; $1'' = 10'''$; $1''' = 10''''$

Daher nun

A
$1^{\circ} = 10' = 100'' = 1000''' = 10000''''$
$1' = 10'' = 100''' = 1000''''$
$1'' = 10''' = 100''''$
$1''' = 10''''$

Wenn man nun ein vollkommenes □ nimmt, jede ſeiner Seiten in 10 gleiche Theile theilt, und die Verbindungslinien zieht, ſo entſtehen 100 kleine □. Iſt nun die Seite des großen □ = 1°, und jeder Theil derſelben = 1′, ſo iſt das große □ eine Quadrat-Ruthe (□°), und jedes der kleinern ein Quadratfuß (□′). Bei Fortſetzung dieſer Unterſuchung findet man ferner, daß

B
1□° = 100□′; 1□′ = 100□″; 1□″ = 100□‴; 1□‴ = 100□⁗

woraus nun folgt, daß

1□° = 100□′ = 100 . 100□″ = 10000□″
= 10000 . 100□‴ = 1000000□‴
= 1000000 . 100□⁗ = 100000000□⁗
1□′ = 100□″ = 100 . 100□‴ = 10000□‴
= 10000 . 100□⁗ = 1000000□⁗
1□″ = 100□‴ = 100 . 100□⁗ = 10000□⁗
1□‴ = 100□⁗

Wenn man nun die in A und B entwickelten Angaben eingeſehen, ſo wird es nicht ſchwer werden zu begreifen, daß die Rechnung mit Dezimal-Maß viele, und beſonders nachfolgende weſentliche Erleichterungen gewährt.

1) Kann man ſehr leicht ein gegebenes Längenmaß auf Einheiten der kleinſten Gattung reduziren. Z. B. ſind $3° + 4' + 7'' + 9''' = 3000''' + 400''' + 70''' + 9''' = 3479'''$.

Eben ſo ſind

$7°\ 5'\ 2''\ 8'''\ 9'''' = 70000'''' + 5000'''' + 200'''' + 80'''' + 9'''' = 75289''''$

Dieſe Reduktion geſchieht alſo, wenn man die Bezeichnungen weg läßt, und nur die der kleinſten Gattung beibehält, die Ziffern aber ohne Zwiſchenräume an einander rückt.

So iſt z. B. $9°\ 5'\ 7''\ 2'''\ 7''' = 95727''''$

2) Hieraus folgt nun, daß man auch bei einer in Einheiten einer kleinen Gattung ausgedrückten Zahl ſehr leicht findet, wie viel Einheiten der größeren Gattungen darinnen enthalten ſind. Man ſoll z. B. finden, wie viel Ruthen, Fuß, Zoll und Linien in 8756 Linien enthalten ſind. So iſt

$$\frac{8756'''}{10} = 875''\ 6''' \qquad \frac{875''}{10} = 87'\ 5'' \qquad \frac{87'}{10} = 8^\circ\ 7'$$

Folglich $8756''' = 8^\circ\ 7'\ 5''\ 6'''$

Man darf alſo nur, von der Rechten gegen die Linke, jeder Ziffer eine größere Bezeichnung geben, ſo iſt der Zweck erreicht. So iſt

$$20785432'''' = 2078^\circ\ 5'\ 4''\ 3'''\ 2''''$$

Kommen hier Nullen vor, ſo verſteht es ſich von ſelbſt, daß auch dieſe ihre Bezeichnung erhalten müſſen. Z. B. iſt $350807'''' = 35^\circ\ 0'\ 8''\ 0'''\ 7''''$

Eben ſo muß auch bei Nro. 1., wenn eine Zwiſchen-Gattung fehlt, dafür eine Null eingeſchrieben werden. Z. B. $36^\circ\ 7''\ 4'''' = 36^\circ\ 0'\ 7''\ 0'''\ 4'''' = 360704''''$

3) Kann man nun ſehr leicht alle Rechnungsarten mit ſolchen Größen verrichten, wenn man ſie vorher nach Nro. 1. auf Einheiten der kleinſten Gattung bringt.

Beiſpiel 1.

Von einem Rechtecke ſey die eine Seite 4° 2' 3'' und die andere 1° 1' 5''; man ſoll den Flächen-Inhalt finden: ſo iſt

$$(4^\circ\ 2'\ 3'')\ (1^\circ\ 2'\ 5'') = 423'' \cdot 125'' = 52875\ \square''$$

Beiſpiel 2.

Man hat eine Länge von 44° 2' 8'' und ſoll ſolche

in 36 gleiche Theile theilen; wie groß wird jeder Theil werden? Hier iſt

$$\frac{44^\circ\ 2'\ 8''}{36} = \frac{4428''}{36} = 123'' = 1^\circ\ 2'\ 3''$$

4) Auch das Quadrat oder Flächenmaß läßt ſich eben ſo leicht wie das Längenmaß auf Einheiten der kleinſten Gattung reduziren.

Beiſpiel 1.

Wie viel enthalten $5\square^\circ\ 6\square'\ 7\square''$ zuſammen an Quadratzollen? So iſt

$$5\square^\circ + 6\square' + 7\square'' = (500+6)\square' + 7\square'' = 506\square' + 7\square'' = (50600+7)\square'' = 50607\square''.$$

Beiſpiel 2.

$$12\square^\circ + 18\square' + 20\square'' = (1200+18)\square' + 20\square'' = 1218\square' + 20\square'' = (121800+20)\square'' = 121820\square''.$$

Man hat alſo, wenn jede Größe aus einer Zahl von zwei Ziffern beſteht, nichts anders zu thun, als die Ziffern zuſammen zurücken und, mit Ausſchluß der letzten, alle Bezeichnungen wegzulaſſen. So iſt $13\square^\circ\ 24\square'\ 17\square''\ 12\square''' = 13241712\square'''$

Beſtehen jedoch die Größen aus einzelnen Ziffern, ſo muß jeder Ziffer, mit Ausſchluß der letztern, eine Null angehängt werden.

Z. B. iſt $8\square^\circ\ 7\square'\ 3\square''\ 9\square''' = 8070309\square'''$.

Denn es iſt

$$8\square^\circ\ 7\square'\ 3\square''\ 9\square''' = (800+7)\square'\ 3\square''\ 9\square''' = 807\square'\ 3\square''\ 9\square''' = (80700+3)\square''\ 9\square''' = 80703\square''\ 9\square''' = (8070300+9)\square''' = 8070309\square'''$$

wie oben.

Fehlt jedoch eine der Zwiſchen-Gattungen gänzlich, ſo müſſen ſtatt ihrer zwei Nullen eingeſchaltet werden. Z. B. iſt

$$8\square^\circ\ 7\square''\ 6\square''' = 8000706\square'''$$

Denn es iſt

$$8\square^\circ + 0\square' + 7\square'' + 6\square''' = (800+0)\square' + 7\square'' + 6\square'''$$

$$= 800\square' + 7\square'' + 6\square''' = (80000 + 7)\square'' + 6\square'''$$
$$= 80007\square'' + 6\square''' = (8000700 + 6)\square''' = 8000706\square'''$$

wie oben.

5) Eben ſo wenigen Schwierigkeiten iſt es unterworfen, eine Anzahl von Quadrat-Punkten, Linien, Zollen ꝛc. auf die darin enthaltene Anzahl größerer Gattungen zu bringen.

Beiſpiel 1.

17856 □'' ſollen durch (□°) (□') (□'') ausgedrückt werden: ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{17856\square''}{100} = 178\square'\ 56\square'' \\[2ex] \dfrac{178\square'}{100} = 1\square^{\circ}\ 78\square' \end{array}\right\}$$

Mithin $17856\square'' = 1\square^{\circ}\,78\square'\ 56\square''$

Beiſpiel 2.

$$235796872\square'''' = 2\square^{\circ}\ 35\square'\ 79\square''\ 68\square'''\ 72\square''''.$$

Beiſpiel 3.

$$38070102\square''' = 38\square^{\circ}\ 07\square'\ 01\square''\ 02\square'''.$$
$$= 38\square^{\circ}\ 7\square'\ 1\square''\ 2\square'''.$$

Man theilt alſo hier von der Rechten nach der Linken in Klaſſen zu zwei Ziffern ab, und gibt jeder Klaſſe eine höhere Bezeichnung.

Noch einige Beiſpiele über das Ganze werden es noch genauer verſinnlichen.

Beiſpiel I.

Ein Rechteck iſt 2° 1' 7'' 3''' lang und 3° 2' 3'' 5''' breit; wie iſt der Flächen-Inhalt?

So iſt $(2^{\circ}\,1'7''3''')(3^{\circ}\,2'3''5''') = 2173'''.3235''' =$
$7029655\square''' = 7\square^{\circ}\ 02\square'\ 96\square''\ 55\square''' =$
$7\square^{\circ}\ 2\square'\ 96\square''\ 55\square'''$

Beiſpiel II.

Ein Quadrat enthält 97 □° 81 □' 21 □'' Flächenraum; man ſoll eine Seite deſſelben finden.

Benennt man die Seite mit l, ſo iſt

$l = \sqrt{97 \square^\circ\ 81 \square'\ 21 \square''} = \sqrt{978121 \square''} = 989''$
$= 9^\circ\ 8'\ 9''$.

Beiſpiel III.

Der Durchmeſſer eines Kreiſes beträgt 2° 4'; man ſoll die Peripherie = P, und den Flächen-Inhalt = S finden. So iſt

$1 : 3{,}14 = 2^\circ\ 4' : P$

oder $100 : 314 = 24' : P$

woraus $P = \frac{24 \cdot 314'}{100} = \frac{7536'}{100} = 75{,}36' =$
$= 7^\circ\ 5'\ 3''\ 6'''$.

Und nun $S = \frac{75{,}36' \cdot 24'}{4} = 75{,}36' \cdot 6' = 452{,}16 \square'$
$= 4 \square^\circ\ 52{,}16 \square' = 4 \square^\circ\ 52 \square'\ 16 \square''$.

Beiſpiel IV.

Ein △ enthält $10 \square^\circ\ 50 \square'\ 28 \square''$ Flächenraum, ſeine Höhe beträgt 4° 8' 4''; man ſoll die Grundlinie finden. So iſt

$(10 \square^\circ\ 50 \square'\ 28 \square'') : \frac{4^\circ\ 8'\ 4''}{2} = 105028 \square'' : \frac{484''}{2}$
$= 105028 \square'' : 242'' = 434'' = 4^\circ\ 3'\ 4''$

Aus dem Beiſpiel Nro. III. ergibt ſich nun noch Folgendes.

1) Kommen beim Längen-Dezimalmaß Dezimal-Ziffern der kleinſten Gattung vor, ſo erhalten ſolche, von dem Komma ab gegen die Rechte, jede eine neue und kleinere Bezeichnung. Nämlich es iſt

$(378{,}673)^\circ = 378^\circ\ 6'\ 7''\ 3'''$.

Denn es iſt $378{,}673^\circ = 378^\circ + \frac{673^\circ}{1000} = 378^\circ +$

$$\frac{673 \cdot 10'}{1000} = 378^\circ + \frac{673\not{0}'}{100\not{0}} = 378 + 6' + \frac{73'}{100} = 378^\circ$$

$$+ 6' + \frac{730''}{100} = 378^\circ + 6' + 7'' + \frac{3''}{10} = 378^\circ + 6'$$

$$+ 7'' + \frac{3 \cdot 10'''}{10} = 378^\circ\ 6'\ 7''\ 3'''.$$

2) Kommen bei Flächen-Dezimalmaß Dezimal-Stellen vor, ſo werden ſolche, vom Komma angefangen, gegen die Rechte in Klaſſen zu zwei Ziffern getheilt, und erhalten neue und kleinere Bezeichnung; und wenn die letzte Ziffer einzeln zu ſtehen kömmt, ſo wird ſolcher eine Null angehängt.

Nämlich es iſt $6{,}4768 \square^\circ = 6 \square^\circ\ 47 \square'\ 68 \square''$

Denn es iſt

$$6{,}4768 \square^\circ = 6 \square^\circ + \frac{4768 \square^\circ}{10000} = 6 \square^\circ + \frac{4768 \cdot 1\not{0}\not{0} \square'}{100\not{0}\not{0}}$$

$$= 6 \square^\circ + 47 \square' + \frac{68 \square'}{100} = 6 \square^\circ + 47 \square' + \frac{68 \cdot 1\not{0}\not{0} \square''}{1\not{0}\not{0}}$$

$= 6 \square^\circ + 47 \square' + 68''$; wie oben.

Eben ſo iſt $10{,}3 \square' = 10 \square' + 30 \square''$

Denn es iſt

$$10{,}3 \square' = 10 \square' + \frac{3 \square'}{10} = 10 \square' + \frac{3 \cdot 10\not{0} \square''}{1\not{0}}$$

$= 10 \square' + 30 \square''$

welches auch ſchon daraus erhellet, daß $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$, und in der Rechnung mit zehntheiligem Flächenmaß eine Einheit jeder Gattung immer $\frac{1}{100}$ der nächſtfolgenden größeren Gattung ausdrückt.

§. 148.

Bei zwölftheiligem oder Duodezimalmaß findet Folgendes ſtatt.

$$1^\circ = 12', \ 1' = 12'', \ 1'' = 12''', \ 1''' = 12''''$$

weßhalb nun

$$1^\circ = 12' = 12 \cdot 12'' = 144'' = 12 \cdot 144''' = 1728''' = 12 \cdot 1728'''' = 20736'''';$$
$$1' = 12'' = 12 \cdot 12''' = 144''' = 12 \cdot 144'''' = 1728''''$$
$$1'' = 12''' = 12 \cdot 12'''' = 144''''$$
$$1''' = 12''''.$$

A

Noch kleinere Theile als Punkte werden ſowohl in dieſem als in dem Dezimalmaße durch Zehntheile ꝛc. von Punkten ausgedrückt.

Theilt man nun die Seite eines Quadrats, welche $= 1^\circ$, in zwölf gleiche Theile, wovon jeder $= 1'$, ſo ergibt ſich, wenn man die Theilungslinie ziehet, daß 144 kleinere Quadrate entſtehen, wovon jedes $= 1\square'$, wenn das größere $= 1\square^\circ$ war.

Bei Fortſetzung dieſer Unterſuchung findet man nun daß

$$1\square^\circ = 12 \cdot 12\square' = 144\square', \ 1\square' = 12 \cdot 12\square'' = 144\square'',$$
$$1\square'' = 12 \cdot 12\square''' = 144\square''', 1\square''' = 12 \cdot 12\square'''' = 144\square'''';$$

woraus nun folgt

$$1\square^\circ = 144\square' = 144 \cdot 144\square'' = 20736\square'' = 20736 \cdot 144\square''' = 2985984\square''' \text{ ꝛc.}$$
$$1\square' = 144\square'' = 144 \cdot 144\square''' = 20736\square''' = 20736 \cdot 144\square'''' = 2985984\square'''';$$
$$1\square'' = 144\square''' = 144 \cdot 144\square'''' = 20736\square'''';$$
$$1\square''' = 144\square''''$$

B

Mit Berückſichtigung dieſer in A und B entwickelten Angaben kann man nun auch hier alle dieſelben Rechnungsarten wie mit dem Dezimalmaß verrichten.

1) Ein gegebenes Längenmaß wird auf Einheiten der kleinſten Gattung auf folgende Art reduzirt. Z. B.

$6^0\ 5'\ 10''\ 2''' = (6.12+5)'\ 10''\ 2''' = 77'\ 10''\ 2''' = (77.12+10)''\ 2''' = 934''\ 2''' = (934.12+2)''' = 11210'''$.

Eben ſo ſind

$3^0\ 0'\ 8''\ 0'''\ 6'''' = (3.12+0)'\ 8''\ 0'''\ 6'''' = 36'\ 8''\ 0'''\ 6'''' = (36.12+8)''\ 0'''\ 6'''' = 440''\ 0'''\ 6'''' = (440.12+0)'''\ 6''' = 5280'''\ 6'''' = (5280.12+6)'''' = 63366''''$.

2) Eine in Einheiten einer kleinern Gattung des Långenmaßes ausgedrůckte Grőße wird auf nachfolgende Art auf die darin enthaltenen Einheiten grőßerer Gattung gebracht. Z. B.

11210'''' ſollen durch (') ('') (''') und ('''') ausgedrůckt werden: ſo iſt

$$\frac{11210''''}{12} = 934''' + 2''''$$
$$\frac{934'''}{12} = 77'' + 10'''$$
$$\frac{77''}{12} = 6' + 5''$$

Mithin $11210'''' = 6'\ 5''\ 10'''\ 2''''$

Hier ergibt ſich, wie in Nro. 1., das Verfahren aus dem Anſatze.

3) Multiplication urd Diviſion wird wie gewőhnlich verrichtet, wenn man vorher Alles auf die kleinſte Gattung gebracht hat.

Beiſpiel I.

Man ſoll den Flåchen-Inhalt eines Rechtecks finden, deſſen eine Seite 3' 9'', die andere 2' 6'': ſo iſt

$$3'\ 9'' = (3.12+9)'' = 45''$$
u. $$2'\ 6'' = (2.12+6)'' = 30''$$

Und nun

$$45''.30'' = 1350\ \square'' = \frac{1350\ \square''}{144} = 9\square'\ 54\square''$$

Man kann aber hier auch ſo verfahren, daß man die Einheiten der kleinern Gattungen als Brüche der größern vorſtellt. Hier iſt

$$3'\,9'' = (3\tfrac{3}{4})' = (\tfrac{15}{4})'$$
$$\text{u. } 2'\,6'' = (2\tfrac{1}{2})' = (\tfrac{5}{2})'$$

Woraus

$$\frac{15'}{4}\cdot\frac{5'}{2} = \left(\frac{75}{8}\right)^{\square'} = (9\tfrac{3}{8})\square'$$
$$= 9\square' + \left(\frac{3\cdot144}{8}\right)^{\square''}$$
$$= 9\,\square'\;54\,\square''.$$

Beiſpiel II.

Man ſoll zu einer Linie von 2° 6′, einer andern von 3° 8′, und einer dritten von 4° 9′ eine vierte Proportional-Linie finden: ſo iſt

$$2^\circ\,6' = (2\tfrac{1}{2})^\circ = \tfrac{5}{2}^\circ$$
$$3^\circ\,8' = (3\tfrac{2}{3})^\circ = \tfrac{11}{3}^\circ$$
$$4^\circ\,9' = (4\tfrac{3}{4})^\circ = \tfrac{19}{4}^\circ$$

Und nun

$$(\tfrac{5}{2})^\circ : (\tfrac{11}{3})^\circ = (\tfrac{19}{4})^\circ : x$$

woraus

$$x = \frac{19\cdot11\cdot2}{3\cdot4\cdot5} = \frac{209^\circ}{30}$$

$$= 6^\circ + \frac{29^\circ}{30} = 6^\circ + \frac{29\cdot12'}{30} = 6^\circ\;11\tfrac{3}{5}' = 6^\circ\;11'$$
$$+ \frac{3\cdot12''}{5} = 6^\circ\;11'\;7\tfrac{1}{5}'' = 6^\circ\;11'\;7''\;2\tfrac{2}{5}'''.$$

Oder.

$$2^\circ\,6' = 30'$$
$$3^\circ\,8' = 44'$$
$$4^\circ\,9' = 57'$$

woraus

$$30' : 44' = 57' : x$$

$$\text{und } x = \frac{44\cdot57'}{30} = \frac{22\cdot19'}{5}$$

$$= \frac{418'}{5} = (83\tfrac{3}{5})' = 6^\circ\;11'\;7''\;2\tfrac{2}{5}''' \text{ wie vorher.}$$

4) Wenn ein zwölftheiliges Quadratmaß auf Einheiten der kleinern Gattungen gebracht werden ſoll, ſo verfährt man wie in Nro. 1, nur daß hier mit 144, dort aber mit 12 multiplizirt wurde.

Z. B. iſt

$$7\,\square^{\circ}\;112\,\square'\;96\,\square'' = (7.144+112)\,\square'\;96\,\square'' = 1120\,\square'\;96\,\square'' = (1120.144+96)\,\square'' = 161376\,\square''.$$

Eben ſo iſt

$$3\,\square^{\circ}\;76\,\square'\;140\,\square'' = (3.144+76)\,\square'\;140\,\square'' = 508\,\square'\;140\,\square'' = (508.144+140)\,\square'' = 73292\,\square''$$

5) Soll das eben behandelte Maß auf Einheiten größerer Gattungen gebracht werden, ſo wird wie in Nro. 2. verfahren; jedoch hier mit 144, anſtatt dort mit 12 dividirt.

Z. B. es ſind

$374531\,\square''$ auf $(\square^{\circ})$ $(\square')$ und $(\square'')$ zu bringen, ſo iſt

$$\frac{374531\,\square''}{144} = 2600\,\square'\;131\,\square''$$

$$\frac{2600\,\square'}{144} = 18\,\square^{\circ}\;8\,\square'$$

Mithin $374531\,\square'' = 18\,\square^{\circ}\;8\,\square'\;131\,\square''$

Oder

Man ſoll $60000\,\square''$ in $(\square^{\circ})$ $(\square')$ und $(\square'')$ verwandeln: ſo iſt

$$\frac{60000\,\square''}{144} = 416\,\square'\;96\,\square''$$

$$\frac{416\,\square'}{144} = 2\,\square^{\circ}\;128\,\square'$$

Mithin $6000\,\square'' = 2\,\square^{\circ}\;128\,\square'\;96\,\square''$

Ich will nun über die ganze Rechnungsart noch einige Beiſpiele zur deutlichen Erläuterung herſetzen.

1) Von einem Rechtecke enthält die eine Seite 8′ 4″, die andere 10′ 9″ 2‴; wie iſt der Flächen-Inhalt? So iſt $8'\,4'' = (8.12+4)'' = 100'' = 100.12''' = 1200'''$ und $10'\,9''\,2''' = (10.12+9)''\,2''' = 129''\,2''' = (129.12+2)''' = 1550'''$

Und nun

$1200'''.1550''' = 1860000\,\square'''$, woraus

$$\frac{1860000 \square'''}{144} = 12916 \square'' + 96 \square''' = \left(\frac{12916}{144}\right)\square' + 96 \square''' = 89 \square' \; 100 \square'' \; 96 \square'''.$$

II) Der Flächen-Inhalt eines Kreiſes S ſey = $5 \square^\circ \; 80 \square'$; man ſoll den Halbmeſſer = a, Durchmeſſer = d, und die Peripherie = p finden.

So iſt

$$5 \square^\circ \; 80 \square' = (5 \cdot 144 + 80) \square' = 800 \square' = S$$

Da nun $S = a^2 \pi$

So iſt $a^2 = \frac{800}{3,14} = \frac{80000}{314} = 254,74 \ldots$

woraus $a = \sqrt{254,74 \ldots} = 15,9' \ldots$

Es iſt aber

$15,9' = 1^\circ \; 3' \; 10,8'' = a$, deßhalb

$31,8' = 2^\circ \; 7' \; 9,6''$ und endlich

$100 : 314 = 31,8' : p$

oder $1000 : 314 = 318' : p$

woraus $p = \frac{318 \cdot 314}{1000} = 99,852'$

$= 8^\circ \; 3' \; 10,224''$

§. 149.

Man kann nun auch ſehr leicht das Dezimalmaß in zwölftheiliges, und umgekehrt, verwandeln. Bei dieſen Verwandlungen iſt Folgendes zu betrachten.

1) Die Maße der Ruthen ſind gleich groß, es findet alſo hier keine Veränderung ſtatt.

Nämlich es iſt

$1 D^\circ = 1 D d^\circ$, alſo auch $n D^\circ = n D d^\circ$

2) Da aber $12\,Dd' = 1^{\circ}$
und $10\,D' = 1^{\circ}$

ſo ſind auch $12\,Dd' = 10\,D'$

Würde nun gefragt, was betragen 60 Duodezimal-Fuß nach zehntheiligem Maß? ſo ſagt man

$$12\,Dd' : 10\,D' = 60\,Dd' : x\,D'$$

$$\text{woraus } x = \frac{600}{12}\,D' = 50\,D'$$

Probe:

$$60\,Dd' = \frac{60}{12}\,Dd^{\circ} = 5^{\circ},$$

$$\text{und auch } 50\,D' = \frac{50}{10}\,D^{\circ} = 5^{\circ}$$

Oder

Was betragen 600 Dezimal-Fuß nach zwölftheiligem Maß? ſo iſt

$$10\,D' : 12\,Dd' = 600\,D' : x\,Dd'$$

$$\text{woraus } x = \frac{12\,.\,600}{10}\,Dd' = 720\,Dd'$$

Probe:

$$600\,D' = \frac{600}{10}\,D^{\circ} = 60^{\circ}$$

$$\text{und auch } 720\,Dd' = \frac{720}{12}\,Dd^{\circ} = 60^{\circ}$$

3) Da nun $12\,Dd' = 10\,D'$ (A

ſo ſind auch $12\,.\,12\,Dd'' = 10\,.\,10\,D''$

d. i. $144\,Dd'' = 100\,D''$ (B

Ferner $144\,.\,12\,Dd''' = 100\,.\,10\,D'''$

d. i. $1728\,Dd''' = 1000\,D'''$ (C

eben ſo $1728 \cdot 12\,Dd'''' = 1000 \cdot 10\,D''''$

d. i. $20736\,Dd'''' = 10000\,D''''$ (D)

Mit Hülfe der Gleichungen A, B, C und D kann man nun jedes Längenmaß in das andere verwandeln.

Beiſpiel I.

13000 D″ ſollen in Dd″ verwandelt werden. So iſt vermöge B

$$100\,D'' : 144\,Dd'' = 13000\,D'' : x\,Dd''$$

woraus $x = 144 \cdot 130\,Dd'' = 18720\,Dd''$

Und nun $\frac{18720\,Dd''}{12} = 1560\,Dd'$, $\frac{1560}{12}\,Dd' = 130^\circ$ } Mithin $x = 130^\circ$

Probe:

$\frac{13000\,D''}{10} = 1300\,D'$, $\frac{1300\,D'}{10} = 130^\circ$ } alſo auch $13000\,D'' = 130^\circ$

Beiſpiel II.

Was betragen 5184 Dd‴ nach zehntheiligem Maße? ſo iſt vermöge C

$$1728\,Dd''' : 1000\,D''' = 5184\,Dd''' : x\,D'''$$

woraus $x = \frac{5184000}{1728}\,D''' = 3000\,D'''$

Nun ſind aber $3000\,D''' = 300\,D'' = 30\,D' = 3^\circ$
und auch $5184\,Dd''' = 432\,Dd'' = 36\,D' = 3^\circ$

Es verſteht ſich hier übrigens wohl von ſelbſt, daß, wenn ein zu verwandelndes Maß aus Einheiten mehrerer Gattungen beſteht, ſolches erſt auf Einheiten der kleinſten Gattung gebracht wird, bevor die Gleichungen A, B, C oder D angewendet werden können.

4) Bei Verwandlung der Flächenmaße betrachte man, daß

$$1\,D\square^{\circ} = 1\,Dd\square^{\circ}$$

ſo ſind auch $100\,D\square' = 144\,Dd\square'$ (E

Ferner $100 \cdot 100\,D\square'' = 144 \cdot 144\,Dd\square''$

d. i. $10000\,D\square'' = 20736\,Dd\square''$ (F

Ferner auch $10000 \cdot 100\,D\square''' = 20736 \cdot 144\,Dd\square'''$

d. i. $1000000\,D\square''' = 2985984\,Dd\square'''$ ꝛc. (G

Beiſpiel I.

Ein Rechteck enthält nach Dezimal-Flächenmaß $90\square'$ $0\square''$ $96\square'''$; wie viel wird es nach zwölftheiligem enthalten?

Hier iſt $90\square'\ 0\square''\ 96\square''' = 900096\,D\square'''$ und nun vermöge G

$$1000000 : 2985984 = 900096\,D\square''' : x\,Dd\square'''$$

woraus $x = 2985984 \cdot 0{,}900096$
$= 2687672{,}254464\,Dd\square'''$.

Nun iſt

$$\frac{2687672}{144}\,Dd\square''' = 18664\,Dd\square''\ 76\,Dd\square'''$$

$$\frac{18664}{144}\,Dd\square'' = 129\,Dd\square'\ 88\,Dd\square''$$

Alſo $2687672\,Dd\square''' = 129\,Dd\square'\ 88\,Dd'\ 76\,Dd\square'''$

Ferner iſt noch

$$0{,}254464\,Dd\square''' = \frac{254464 \cdot 144}{1000000}\,Dd\square'''$$
$$= 36{,}642816\,Dd\square'''$$

Folglich

$x = 129\,Dd\,\Box' \; 88\,Dd\,\Box'' \; 76\,Dd\,\Box''' \; 36{,}642816\,Dd\,\Box''''$

Beiſpiel II.

Ein Rechteck enthält nach zwölftheiligem Quadratmaße $89\,\Box' \; 100\,\Box'' \; 96\,\Box'''$; wie viel beträgt dieſes nach Dezimalmaße?

$89\,\Box' \; 100\,\Box'' \; 96\,\Box''' = 1860000\,Dd\,\Box'''$

Alſo nach G

$2985984\,Dd\,\Box''' : 1000000\,D\,\Box''' = 1860000\,Dd\,\Box''' : x\,D\,\Box'''$

woraus $x = 62\,\Box',\,29\,\Box''\;10,\Box''' \ldots\ldots D$ Maß.

Anmerkung. Sollte mir etwa hier der Vorwurf werden, daß ich dieſe Rechnungsarten früher hätte vortragen ſollen, ſo ſage ich nach meiner Ueberzeugung, Nein! indem ich glaube, daß es beſſer iſt, dem Anfänger, der für ſich ſtudirt, einen neuen Gegenſtand zuerſt ſo einfach, als möglich, zu zeigen, bevor man zu den verwickeltern Behandlungen übergeht; und es iſt, wenn der Schüler erſt weiß, wie man den Flächen-Inhalt jeder Figur findet, nun immer noch Zeit, ihm die Rechnungsarten mit den verſchiedenen Maßen zu lehren.

Von der Vergleichung und Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 150.

Die Flächen-Inhalte verſchiedener Dreiecke verhalten ſich gegen einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Es ſey der Flächen-Inhalt eines $\triangle$s $= S$, ſeine Höhe $= H$, ſeine Grundlinie $= G$, ſo iſt

$$S = \frac{G \, . \, H}{2}$$

Ferner ſey der Flächen-Inhalt eines andern △s = s, ſeine Höhe = h, die Grundlinie = g, ſo iſt

$$s = \frac{g \, . \, h}{2}$$

Mithin augenſcheinlich

$$S : s = \frac{GH}{2} : \frac{g \, . \, h}{2}$$

und $S : s = GH : gh$ (A

w. z. e. w.

§. 151.

Hieraus folgt nun

I) Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten ſich wie ihre Höhen, und ſolche von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien.

Es ſey im vorigen §. $G = g$, ſo iſt nun A

$$S : s = GH : Gh$$

d. i. $S : s = H : h$

Iſt aber im vorigen §. $H = h$, ſo wird aus A

$$S : s = GH : gH$$

d. i. $S : s = G : g$

w. z. e. w.

§. 152.

II. Bei gleichem Flächen-Inhalte ſtehen die Dreiecke in verkehrter Proportion ihrer Grundlinien und Höhen.

Es ſey in §. 150. $S = s$, ſo iſt in A

$$S : S = GH : gh$$

Alſo auch $GH = gh$

woraus $G : g = h : H$

w. z. e. w.

§. 153. Fig. 126.

III) Wenn zwei △△ einen gleichen ∟ haben, ſo verhalten ſie ſich gegen einander wie die Produkte aus den Seiten, welche den gleichen ∟ einſchließen.

Nämlich wenn $\angle x = \angle y$, ſo iſt auch

$$\triangle ABC : \triangle EFG = AB \,.\, AC : EF \,.\, EG$$

Beweis:

Es iſt $ABC : EFG = AC \,.\, BD : EG \,.\, FH$ §. 150.

Das dritte und vierte Glied durch BD dividirt

$$ABC : EFG = AC : \frac{EG \,.\, FH}{BD} \qquad (A$$

Nun iſt aber $\triangle ABD \sim EFH$

Alſo auch $AB : BD = EF : FH$

$$\text{woraus } FH = \frac{BD \,.\, EF}{AB} \qquad (B$$

Dieſen Werth aus B in A gibt

$$ABC : EFG = AC : \frac{EG}{BD} \,.\, \frac{BD \,.\, EF}{AB}$$

$$\text{und nun } ABC : EFG = AC : \frac{EG \,.\, FF}{AB}$$

Das dritte und vierte Glied durch AB multiplizirt, gibt

$$ABC : EFG = AC \,.\, AB : EF \,.\, EG$$

w. z. e. w.

§. 154. Fig. $126\frac{1}{2}$.

III) Aehnliche △△ verhalten ſich gegen ein-

ander, wie die Quadrate ihrer gleichlie-
genden (gleichnahmigen) Seiten, und wie
die Quadrate ihrer Höhen.

Nämlich wenn $\triangle ABC \backsim \triangle DEG$

ſo iſt auch $ABC : DEG = AB^2 : DE^2$ (I

und " : " $= AC^2 : DG^2$ (II

ferner " : " $= BC^2 : EG^2$ (III

und auch " : " $= FC^2 : HG2$ (IV

Beweis:

Wegen Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ iſt

$$GH : FC = DE : AB$$

woraus $\frac{GH}{FC} = \frac{DE}{AB}$ (A

Nun iſt aber auch

$ABC : DEG = AB \,.\, FC : DE \,.\, HG$ n. §. 150.

die beiden letztern Glieder durch FC dividirt

$ABC : DEG = AB : \frac{DE \,.\, HG}{FC}$ (B

Den Werth von $\frac{GH}{FC}$ aus A in B gibt

$$ABC : DEG = AB : DE \,.\, \frac{DE}{AB}$$

Beide letzten Glieder durch AB multiplizirt

$ABC : DEG = AB^2 : DE^2$ (C

wodurch Nro. I. erwieſen.

Da nun aber auch wegen Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$

$$AC : DG = AB : DE$$

ſo iſt auch $AC^2 : DG^2 = AB^2 : DE^2$ (D

aus E und D aber

$$ABC : DEG = AC^2 : DG^2 \quad (E$$

wodurch Nro. II. erwieſen.

Aus vorerwähntem Grunde iſt aber auch noch

$$BC : EG = AC : DG$$

und auch $BC^2 : EG^2 = AC^2 : DG^2$ (F

ſo wird aus E und F

$$ABC : DEG = BC^2 : EG^2 \quad (G$$

wodurch Nro. III. erwieſen.

Endlich iſt noch

$$CF : GH = BC : EG$$

und auch $CF^2 : GH^2 = BC^2 : EG^2$ (H

Aus G und H wird nun

$$ABC : DEG = CF^2 : GH^2$$

wodurch auch Nro. IV. erwieſen.

§. 155.

Endlich folgt noch Vtens aus §. 150.: daß alles, was von Dreiecken erwieſen worden, auch bei Parallelogrammen ſtatt findet.

Denn ein Parallelogramm iſt nichts anders, als die Summe zweier Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen. Da nun alles, was von dem Einfachen gilt, auch vom Doppelten geſagt werden kann: ſo iſt auch alles, was von △△ dargethan worden, auch von Parallelogrammen erwieſen.

§. 156. Fig. 97.

Die Flächen-Inhalte ähnlicher Vielecke ver-

halten ſich wie die Quadrate ihrer gleichnahmigen Seiten.

Nämlich es iſt, wenn $ABCDE \sim abcde$, auch

$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$ I.
$\ldots\ldots : \ldots\ldots = BC^2 : bc^2$ II.
$\ldots\ldots : \ldots\ldots = CD^2 : cd^2$ III.
$\ldots\ldots : \ldots\ldots = DE^2 : de^2$ IV.
$\ldots\ldots : \ldots\ldots = EA^2 : ea^2$ V.

Beweis:

Denn es iſt $AB : ab = AC : ac$, wegen Aehnlichkeit ꝛc. (A
aber auch $AD : ad = AC : ac$ aus gleichem Grunde

woraus $AD : ad = AB : ab$ (B

Ferner iſt auch
$AD : ad = AE : ae$ wie oben

$AE : ae = AB : ab$ (C

aus A folgt $AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ (D
= B = $AD^2 : ad^2 = AB^2 : ab^2$ (E
= C = $AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2$ (F

Ferner iſt nun $ABC : abc = AC^2 : ac^2$ (G
und $ACD : acd = AD^2 : ad^2$ (H
und auch $ADE : ade = AE^2 : ae^2$ (J
} nach §. 154.

aus D und G wird $ABC : abc = AB^2 : ab^2$
aus E und H = $ACD : acd = AB^2 : ab^2$
aus F und J = $ADE : ade = AB^2 : ab^2$

und nun $(ABC + ACD + ADE) : (abc + acd + ade) = AB^2 : ab^2$

d. i. $ABCDE : abcde = AB^2 \; ab^2$ (K

wodurch Nro. I. erwieſen.

Da nun auch $Ab : ab = BC : bc$

und auch $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ (L

ſo wird aus K und L

$ABCDE : abcde = BC^2 : bc^2$

wodurch auch Nro. II. erwieſen.

Ferner iſt $AC : ac = CD : cd$

alſo auch $AC^2 : ac^2 = CD^2 : cd^2$ (M

aus D und M, $CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$ (N

und aus K und N

$ABCDE : abcde = CD^2 : cd^2$

wodurch auch Nro III. dargethan

Auch iſt $AD : ad = DE : de$

alſo auch $AD^2 : ad^2 = DE^2 : de^2$ (O

aus D und E, $DE^2 : de^2 = AB^2 : ab^2$ (P

aus K und P

$ABCDE : abcde = DE^2 : de^2$

und ſomit auch IV. erwieſen.

Endlich iſt noch $AD : ad = EA : ea$

alſo auch $AD^2 : ad^2 = EA^2 : ea^2$ (Q

aus F und Q, $EA^2 : ea^2 = AB^2 : ab^2$ (R

und aus K und R

$ABCDE : abcde = EA^2 : ea^2$

wodurch nun auch V. erwieſen iſt.

§. 157. Fig. 98.

Die Flächen-Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten ſich, wie die Quadrate der Radien der eingeſchriebenen Kreiſe; wie die Qua-

drate der Radien der umſchriebenen Kreiſe; wie die Quadrate der Durchmeſſer in beiden Fällen, und wie die Quadrate ihrer Seiten.

Nennen wir den Flächen-Inhalt von ABCDEF = S, und abcdef = s, ſo wird, wenn wir

ON = b, FE = a, FO = f und
on = d, fe = c, fo = g ſetzen

$$S : s = b^2 : d^2 \qquad \text{I.}$$
$$S : s = f^2 : g^2 \qquad \text{II.}$$
$$S : s = a^2 : c^2 \qquad \text{III.}$$

Beweis:

Wenn wir den Flächen-Inhalt S durch a und b ausdrücken, ſo iſt

$$S = 6a \cdot \frac{b}{2} = 3ab,$$ und eben ſo

$$s = 6c \cdot \frac{d}{2} = 3cd,$$ alſo zu I zu beweiſen, daß

$$3ab : 3cd = b^2 : d^2$$

wir dürfen alſo nur darthun, daß die Proportion richtig, ſo iſt auch der Beweis geführt.

Die Richtigkeit einer Proportion erhellet aber aus der Gleichheit der Produkte der mittlern und äußern Glieder; dieſe ſind hier

$$3abd^2 = 3b^2cd \qquad (\mathfrak{A}$$

nun iſt aber $a : b = c : d$ wegen Aehnlichkeit

alſo auch $ad = bc$ (𝔅

Nun ſubſtituire man den Werth von ad aus 𝔅 in 𝔄, ſo iſt

$$3abdd = 3b^2cd$$
und nun $$3bbcd = 3b^2cd$$

Alſo die Produkte 𝔄 einander gleich, mithin auch die Proportion richtig.

Daher nun $3ab : 3cd = b^2 : d^2$ richtig
nämlich $S : s = b^2 : d^2$ (E

wodurch I. erwieſen.

Ferner iſt $b : d = f : g$ wegen Aehnlichkeit
alſo auch $b^2 : d^2 = f^2 : g^2$ (D
aus E und D aber $S : s = f^2 : g^2$ (E

und ſo auch II. erwieſen.

Endlich iſt $a : c = f : g$
und auch $a^2 : c^2 = f^2 : g^2$ (F
ſo wird aus E und F $S : s = a^2 : c^2$

wodurch auch III. erwieſen.

Da nun alles, was von Halbmeſſern gilt, auch von Durchmeſſern geſagt werden kann, ſo wird aus I. und II. klar, daß auch die Flächen-Inhalte ähnlicher Vielecke ſich gegen einander verhalten, wie die Quadrate der Durchmeſſer der eingeſchriebenen, und auch wie die Quadrate der Durchmeſſer der umſchriebenen Kreiſe.

§. 158. Fig. 127.

Die Kreis-Flächen verhalten ſich gegen einander, wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer, wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer, und wie die Quadrate der Sehnen ähnlicher Bogen.

Nämlich es iſt
$S : s = c^2 : d^2$ I.
Ferner $S : s = (2c)^2 : (2d)^2$,
d. i. $S : s = MO^2 : mo^2$ II.
und auch $S : s = q^2 : t^2$
oder $S : s = p^2 : r^2$ } III.

Beweis:

Es iſt der Flächenraum $S = \frac{ac}{2}$, $s = \frac{bd}{2}$, wenn wir die Peripherie des größern Kreiſes = a, den Halbmeſſer = c, die Peripherie des kleinern Kreiſes = b, den Halbmeſſer = d ſetzen. Alſo zu erweiſen, daß

$$\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} = c^2 : d^2$$

Um die Richtigkeit dieſer Proportion darzuthun, bedarf es nur die Richtigkeit der Produkte der mittlern und äußern Glieder zu erweiſen. Dieſe ſind

$$\frac{acd^2}{2} = \frac{bc^2d}{2} \quad (A$$

Da nun $a : c = b : d$

ſo iſt auch $ad = bc$ (B

und man darf nur den Werth von ad aus B in A ſubſtituiren, ſo iſt

$$\frac{acdd}{2} = \frac{bc^2d}{2}$$

ſubſtituirt $\frac{bccd}{2} = \frac{bc^2d}{2}$

folglich die Produkte gleich, und auch

$$\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} = c^2 : d^2 \text{ richtig.}$$

wodurch I. erwieſen.

nun iſt auch $\sqrt{\frac{ac}{2}} : \sqrt{\frac{bd}{2}} = c : d$

alſo auch $\sqrt{\frac{ac}{2}} : \sqrt{\frac{bd}{2}} = 2c : 2d$

$$\text{woraus } \frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} = (2c)^2 : (2d)^2$$

$$\text{d. i. } \frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} = MO^2 : mo^2 \quad (\mathfrak{C}$$

wodurch auch II. erwieſen.

Setzen wir nun $\llcorner x = \llcorner z$
und $\llcorner y = \llcorner u$

ſo iſt auch $\frown MN = \frown mn$ } in Hinſicht ihrer
und $\frown NO = \frown no$ } Anzahl Grade.

folglich MN und mn Sehnen ähnlicher ⌒, und eben ſo NO und no.

Da nun $\triangle MNO \sim mno$

und deßhalb $MN : mn = MO : mo$

also auch $MN^2 : mn^2 = MO^2 : mo^2$ $\quad (\mathfrak{D}$

Aus $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ nun $\frac{ac}{2} : \frac{bd}{2} = MN^2 : mn^2$

d. i. $S : s = p^2 : r^2$

wodurch auch III. erwieſen.

Eben ſo kann auch erwieſen werden, daß
$S : s = q^2 : t^2$

§. 159.

Wir können nun erweiſen, daß eine Linie GH, welche die mittlere Proportionale zwiſchen den Theilen EG und GF des Durchmeſſers EF iſt, der Radius eines Kreiſes ſey, welcher an Flächen-Inhalte der Krone oder dem Ringe x gleich iſt.

Beweis:

Fig. 128.

Denn es iſt $DH^2 = GD^2 + GH^2$ (A

Da ſich nun die Kreisflächen zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer, ſo iſt erſichtlich: daß ein Kreis mit dem Radius DH geſchlagen, zwei andern Kreiſen, wovon einer mit dem Halbmeſſer GD, und der andere mit GH geſchlagen iſt, an Flächen-Inhalte gleich iſt. Bezeichnen wir die Peripherie des Halbmeſſers DH mit P, und DH mit a, den Umkreis des Halbmeſſers GD mit P′ und GD mit a′, und den Umkreis des Halbmeſſers GH mit P″ und GH mit a″ ſo iſt vermöge A

$$a^2 = (a')^2 + (a'')^2$$

und wegen des erwähnten und im vorigen §. bewieſenen Satzes nun auch

$$\frac{aP}{2} = \frac{a'P'}{2} + \frac{a''P''}{2}$$

oder $$\frac{aP}{2} - \frac{a'P'}{2} = \frac{a''P''}{2}$$

Da nun aber $\frac{a''P''}{2} = X =$ der Krone, ſo iſt auch

$$\frac{aP}{2} - \frac{a'P'}{2} = X = \text{der Krone.}$$

Da nun der Umkreis Y mit dem Radius GH = a″ geſchlagen iſt, ſo iſt auch derſelbe = der Krone x.

w. z. e. w.

§. 160. Fig. 129.

Wenn man auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, als gleichſeitige Dreiecke, Halbkreiſe, ähnliche Vielecke ꝛc. errichtet, ſo iſt die Figur auf der

Hypothenuſe gleich der Summe der Figuren auf beiden Katheten.

Z. B. $\triangle ABD = \triangle ACF + \triangle BCE$.

Beweis:

Es iſt $AB^2 : AC^2 = \triangle ABD : \triangle ACF$

aber auch $AB^2 : AC^2 = \triangle ABD : \frac{\triangle ABD \cdot AC^2}{AB^2}$

daher $\triangle ACF = \frac{\triangle ABD \cdot AC^2}{AB^2}$ (A

Eben ſo $AB^2 : BC^2 = \triangle ABD : \triangle BCE$

und auch $AB^2 : BC^2 = \triangle ABD : \frac{\triangle ABD \cdot BC^2}{AB^2}$

daher $\triangle BCE = \frac{\triangle ABD \cdot BC^2}{AB^2}$ (B

A und B addirt

$\triangle ACF + \triangle BCE = \frac{\triangle ABD \cdot AC^2}{AB^2} + \frac{\triangle ABD \cdot BC^2}{AB^2}$

oder

$\triangle ACF + \triangle BCE = \frac{\triangle ABD \cdot (AC^2 + BC^2)}{AB^2}$

Nun iſt aber $AC^2 + BC^2 = AB^2$

Alſo auch $\triangle ACF + \triangle BCE = \frac{\triangle ABD \cdot AB^2}{AB^2}$

d. i. $ACF + \triangle BCE = \triangle ABD$

w. z. e. w.

Wir wollen nun denſelben Satz auch mit Halbkreiſen darthun.

Fig. 130.

Es ſey der Flächen-Inhalt des Halbkreiſes auf der Hypothenuſe = a, ſein Durchmeſſer AB; der auf der größern Kathete an Flächen-Inhalt = b, ſein Durchmeſſer BC; und der auf der kleinern Kathete = c, ſein Durchmeſſer AC.

B e w e i s:

$$a : b = AB^2 : BC^2$$
$$a : c = AB^2 : AC^2$$

denn da die Flächen-Inhalte der Kreiſe wie die Quadrate der Durchmeſſer, alſo auch die Halbkreiſe.

woraus $2a : (b + c) = 2AB^2 : (BC^2 + AC^2)$

oder $a : (b + c) = AB^2 : BC^2 + AC^2$

woraus $a = \frac{AB^2 (b + c)}{BC^2 + AC^2}$

nun iſt aber $AB^2 = BC^2 + AC^2$

Alſo auch $a = \frac{AB^2 (b + c)}{AB^2}$

d. i. $a = b + c$

w. z. e. w.

Es folgt nun von ſelbſt, daß alles, was von den Halbkreiſen erwieſen iſt, auch von den ganzen Kreisflächen dargethan werden kann.

Schlägt man nun den Halbkreis ADB aufwärts, ſo wird er durch C gehen, und ACB werden, und die ⌒⌒ AC und BC werden von den halben Kreisflächen b und c die Monde M und N abſchneiden; und wir können nun ſehr leicht erweiſen, daß das rechtwinklige △ ABC an Flächen-Inhalte den Monden N und M gleich ſey.

Denn es iſt $a = R + Q + P$

$b = P + M$

$$c = Q + N$$

Da nun aber $a = b + c$

ſo iſt auch hier

$$R + Q + P = P + Q + M + N$$

$$\text{d. i. } R = M + N$$

w. z. e. w.

Die Monde M und N werden gewöhnlich Hypokratiſche Monde genannt.

§. 161.

Wir ſind nun im Stande, eine Figur zu verzeichnen, welche mehreren gegebenen ähnlichen Figuren zuſammen genommen an Flächen-Inhalte gleich und ebenfalls ähnlich iſt.

Fig. 131.

Z. B. es ſoll ein Quadrat gezeichnet werden, welches den vier Quadraten a, b, c und d zuſammen genommen gleich, und ebenfalls ein Quadrat iſt. Man ſtelle eine Seite des □ d und eine des □ c unter einem rechten ∟ ABC zuſammen, und ziehe die Hypothenuſe BC, ſo iſt dieſe die Seite eines □, welches dem □ c + □ d an Flächenraume gleich iſt. Ferner ſetze man an BC unter einem rechten ∟ eine Seite des □ b, und ziehe die Hypothenuſe DC: ſo iſt dieſe die Seite eines □, welches an Flächen-Inhalte = □ b + □ c + □ d. Endlich ſetze man an DC wieder unter einem rechten ∟ eine Seite des Quadrats a, und ziehe die Hypothenuſe EC, ſo iſt $EC^2 = a + b + c + d$.

Denn es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2$

d. i. $BC^2 = d + c$ (A

Ferner iſt $DC^2 = BD^2 + BC^2$

d. i. aus A, $DC^2 = b + d + c$ (B

Endlich $EC^2 = DE^2 + DC^2$
d. i. aus B, $EC^2 = a + b + d + c$

Wären a, b, c und d Kreiſe oder Halbkreiſe, ſo würde man mit den Durchmeſſern derſelben eben ſo wie vorher mit den Seiten der Quadrate verfahren; und ſo würde EC der Durchmeſſer eines Kreiſes ſeyn, der an Flächen-Inhalte den Kreiſen der Durchmeſſer AC, AB, BD und DE zuſammen genommen gleich iſt.

§. 162. Fig. 104.

Auch kann man eine Figur zeichnen, welche zwei anderen ähnlichen Figuren ähnlich, und an Flächen-Inhalt dem Unterſchiede der beiden gegebenen gleich iſt.

Man errichte nämlich über der Seite AD der größern, wenn es Vielecke ſind, oder über dem Durchmeſſer AD des größern Kreiſes, wenn es Kreiſe ſind, den Halbkreis ABD, und ſchneide mit der Seite oder Durchmeſſer des kleinern AB den ⌒ AB ab, ziehe BD: ſo iſt dieſes die Seite oder der Durchmeſſer der geſuchten Figur, welche dem Unterſchiede der beiden gegebenen gleich iſt. Denn es iſt augenſcheinlich

$$AD^2 - AB^2 = BD^2$$

Daſſelbe wird auch nach §. 159 an Fig. 128. erreicht.

Fig. 77.

In Bezug auf §. 154. können wir nun auch den Pythagoräiſchen Lehrſatz ſehr kurz und faßlich erweiſen.

Benennen wir den Flächen-Inhalt des △ ABC mit A, von BDC mit B, und von ABD mit C, und übrigens die Seiten AC = a, BC = b, AB = c, ſo iſt

$A : B = a^2 : b^2$
und auch $A : C = a^2 : c^2$ } wegen §. 154. und §. 83.

oder $A : a^2 = B : b^2$

$$\text{und } A : a^2 = C : c^2$$

$$\text{addirt } 2A : 2a^2 = (B+C) : (b^2+c^2)$$

$$\text{daher } A : a^2 = (B+C) : (b^2+c^2)$$

$$\text{Da nun } A = B + C$$

$$\text{alſo auch } A : a^2 = A : (b^2+c^2)$$

$$\text{und } A : A = a^2 : (b^2+c^2)$$

$$\text{Mithin } a^2 = b^2 + c^2$$

w. z. e. w.

§. 163.

Ich gebe nun meinen Leſern eine Reihe von Aufgaben, welche hoffentlich hinreichend ſeyn werden, das Gelernte anzuwenden und feſter einzuprägen.

I) Ein Parallelogramm hat die Grundlinie 120″ und die Höhe 60″; man ſoll ein anderes von gleichem Flächen-Inhalt und der Grundlinie 40″ zeichnen, wie wird deſſen Höhe x ſeyn? So iſt

$$40 \cdot x = 120 \cdot 60$$

$$4x = 120 \cdot 6$$

$$x = \frac{120 \cdot 6}{4} = 60 \cdot 3 = 180''$$

II) Man ſoll die Grundlinie eines Parallelogramms ſuchen, wozu die Höhe H gegeben iſt, welches ſechs Mal größer ſeyn ſoll, als ein anderes gegebenes von der Höhe h und der Grundlinie g. So iſt

der Flächen-Inhalt des gegebenen $= gh$

" " " " geſuchten $= xH$.

Nun ſoll aber xH ſechs Mal ſo groß werden, als gh, folglich iſt

$$6gh = xH$$

$$\frac{6gh}{H} = x$$

III) Man ſoll ein # gr. verzeichnen, welches die Grundlinie B hat, und an Flächen-Inhalte zwölf Mal ſo groß iſt, als ein gegebenes △ von der Grundlinie g und der Höhe h. So iſt

der Flächen-Inhalt des # gramms $= Bx$

" " " " △ $= \frac{gh}{2}$

Nun ſoll aber Bx zwölf Mal ſo groß ſeyn als $\frac{gh}{2}$

folglich iſt

$$12 \frac{gh}{2} = Bx$$

$$\frac{6gh}{B} = x$$

IV) Man ſoll ein □ verzeichnen, welches an Flächen-Inhalt einem △ und einem # gr. zuſammen genommen gleich iſt. Es ſey

A) { Grundlinie des Parallelogramm $= G$
Höhe desſelben . . . $= H$

B) { Grundlinie des △ . . $= g$
Höhe desſelben . . . $= h$

C) Seite des Quadrats . . $= x$

So iſt der Flächen-Inhalt A $= GH$

" " " B $= \frac{gh}{2}$

" " " C $= x^2$

folglich $x^2 = GH + \frac{gh}{2}$

$$x = \sqrt{GH + \frac{gh}{2}}$$

V) Man ſoll die Seite eines Quadrats finden, welches ſechzehn Mal kleiner iſt, als ein gegebenes □.

Die gegebene Seite ſey $= a$, ſo iſt der Flächeninh. $= a^2$
die geſuchte : : $= x$, : : : $= x^2$

Mithin $16x^2 = a^2$

$$x^2 = \frac{a^2}{16}$$

$$x = \frac{a}{4}$$

VI) Man ſoll ein △ zeichnen, welches viertehalb Mal ſo groß iſt, als ein gegebenes △ und ein □ zuſammen genommen; wie groß muß deſſen Höhe ſeyn, wenn die Grundlinie $= g$ gegeben iſt.

Es ſey die Grundlinie des △ $= G$
: : : Höhe : : $= H$

ſo iſt der Flächen-Inhalt $= \frac{GH}{2}$ (A

Ferner ſey die Seite des Quadrats $= q$
ſo iſt der Flächen-Inhalt $= q^2$ (B

Ferner ſey noch Höhe des geſuchten △ $= h$
und die Grundlinie $= g$

ſo iſt der Flächenraum $= \frac{hg}{2}$ (C

Mithin aus A, B und C

$$3\tfrac{1}{2}\left(\frac{GH}{2} + q^2\right) = \frac{hg}{2}$$

$$\tfrac{7}{2}\left(\frac{GH + 2q^2}{2}\right) = \frac{hg}{2}$$

$$\frac{7GH + 14q^2}{2} = hg$$

$$\frac{7GH + 14q^2}{2g} = h$$

Fig. 132.

VII) Es ſoll an einer Figur geometriſch bewieſen werden, daß

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aufloͤſung.

Man verzeichne ein willkuͤhrliches Quadrat ABCD, und nehme ebenfalls die Theile einer Seite, naͤmlich AE + EB = AG + GD = DH + HC = BF + FC = a + b, willkuͤhrlich an: ſo ergibt ſich, daß

$$\begin{aligned} ABCD &= AE^2 + EB \,.\, BF \\ &+ DH \,.\, DG + HC^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

w. z. e. w.

Anmerkung. Der Anfaͤnger verſuche es nun, ſich auf eine aͤhnliche Art darzuthun, daß

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Fig. 133.

VIII) Es wird die Summe aller drei Seiten eines rechtwinkligen △s gegeben, man ſoll die Hypothenuſe finden.

Es ſey AD = a, die Summe aller Seiten AB + AC + BC = P, die geſuchte Seite BC = x: ſo iſt die Summe der beiden uͤbrigen Seiten

$$AB + AC = P - x.$$

Ferner ſey die Differenz der eben genannten beiden Seiten, naͤmlich

$$AC - AB = y$$

ſo iſt die groͤßte Seite bekanntlich = der halben Summe + der halben Differenz, naͤmlich

$$AC = \frac{P-x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{P-x+y}{2}$$

(A

und die kleinere Seite bekanntlich = der halben Summe — der halben Differenz, nämlich

$$AB = \frac{P-x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{P-x-y}{2} \qquad (B$$

Ferner iſt noch $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (C

Endlich iſt der Flächen-Inhalt des △ ABC, nämlich

$$S = \frac{AB \cdot AC}{2}, \text{ aber auch}$$

$$S = \frac{BC \cdot AD}{2}$$

Alſo auch $\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2}$

d. i. $BC \cdot AD = AB \cdot AC$ (D

Drücken wir nun zuerſt die Gleichung C durch A und B aus, ſo iſt

$$x^2 = \left(\frac{P-x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{P-x+y}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{P^2+x^2+y^2-2Px-2Py+2xy+P^2+x^2+y^2-2Px+2Py-2xy}{4}$$

$$x^2 = \frac{2P^2+2x^2+2y^2-4Px}{4}$$

$$4x^2 = 2P^2+2x^2+2y^2-4Px$$

$$4x^2-2x^2 = 2P^2+2y^2-4Px$$

$$2x^2 = 2P^2-4Px+2y^2$$

$$x^2 = P^2-2Px+y^2 \qquad (E$$

Drücken wir nun ferner die Gleichung D durch A und B, und die Werthe von BC und AD aus, ſo iſt

$$a \cdot x = \left(\frac{P-x+y}{2}\right)\left(\frac{P-x-y}{2}\right)$$

$$ax = \frac{P^2 - Px - Py + x^2 - Px + xy + Py - xy - y^2}{4}$$

$$4ax = P^2 - 2Px + x^2 - y^2 \qquad (F$$

Wenn man nun E und F addirt

$$x^2 + 4ax = 2P^2 - 4Px + x^2$$

$$4ax = 2P^2 - 4Px$$

$$4ax + 4Px = 2P^2$$

$$(2a + 2P)\,x = P^2$$

$$x = \frac{P^2}{2\,(a + P)} \qquad (G$$

wo man nun leicht durch die ſubſtituirten Werthe, wenn ſolche gegeben ſind, x findet, oder auch

$2x\,(a + P) = P\,2$ ſetzet,

woraus $2\,(a + P) : P = P : x$

IX) Es ſoll das △ der vorigen Aufgabe, wovon nun Grundlinie und Höhe gegeben ſind, durch Verzeichnung konſtruirt werden.

Fig. 105.

Man mache AC = x, ſchlage den Halbkreis AEC und errichte die Senkrechte AD = a, ziehe die ‡‡ DE zu AC, und laſſe aus E die Senkrechte EB herab, ſo wird EB = DA = a ſeyn; nun ziehe man von E nach A und C, ſo wird AEC das geſuchte △.

Fig. 133.

X) Kürzere Auflöſung der vorhergehenden Aufgabe.

Man nenne AB = Z, AC = w

BD = u, DC = r, alſo BC = u + r, ſo iſt nun

$$P = u + r + z + w \qquad (D$$

und $x = u + r$

Nun iſt aber $\triangle$ ABC ∾ ABD ∾ ADC

Alſo auch (AB + BD + AD) : AB = P : x. nämlich die Summe aller drei Seiten zur Hypothenuſe wie P : x; d. i. nun

$$(z + u + a) : z = P : x \qquad (A$$

Eben ſo auch (AC + DC + AD) : AC = P : x d. i., wie eben geſagt $(w + r + a) : w = P : x$ (B

Endlich iſt nun noch $P : x = P : x$ (C

Aus A, B und C wird nun

$$(P + z + u + w + r + 2a) : (z + w + x) = P : x$$

und vermöge D

$$(P + P + 2a) : (z + w + x) = P : x$$

oder $(2P + 2a) : (z + w + x) = P : x$

Da nun $P = z + w + x$

ſo iſt auch $(2P + 2a) : P = P : x$

oder $2(P + a) : P = P : x$ wie vorher.

Fig. 133.

XI) Aus der gegebenen Summe aller drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und dem Flächen-Inhalte deſſelben die Hypothenuſe zu finden.

Es ſey die Summe aller drei Seiten

$$AB + AC + BC = P$$

Der Flächen-Inhalt ſey $= S^2$

BC wie vorher . . $= x$

So iſt $AB + AC = P - x$

Ferner ſey AB . . $= z$

ſo iſt $AC = P - x - z$

Nun iſt $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (A

und $S^2 = \frac{AB \,.\, AC}{2}$ (B

Wenn man nun in A und B die Werthe der Größen ſetzt, ſo iſt nun

$$\mathfrak{A})\; x^2 = (P - x - z)^2 + z^2$$

$$x^2 = P^2 + x^2 + z^2 - 2Px - 2Pz + 2xz + z^2$$

$$0 = P^2 + z^2 + z^2 - 2Px - 2Pz + 2xz \quad (\mathfrak{C}$$

Aus 𝔅 wird $S^2 = z \,.\, (P - x - z) : 2$

$$2S^2 = Pz - xz - z^2;$$ mit 2 multiplizirt

$$4S^2 = 2Pz - 2xz - 2z^2 \quad (\mathfrak{D}$$

𝔈 und 𝔇 addirt

$$4S^2 = P^2 - 2Px$$

woraus $x = \frac{P^2 - 4S^2}{2P} = \frac{P}{2} - \frac{2S^2}{P}$ (𝔈

XII) Man ſoll die in Aufgabe VIII gefundene Formel 𝔊 für dieſe Auflöſung brauchbar machen; d. h. man ſoll 𝔊 aus VIII in 𝔈 aus XI verwandeln.

In VIII erhielt man

$$\mathfrak{G},\; x = \frac{P^2}{2(a+P)}$$

Da nun hier x ebenfalls durch die Summe der Seiten ausgedrückt iſt, allein noch die in XI als unbekannt angenommene Höhe vorkömmt, ſo iſt weiter nichts zu thun, als a aus 𝔊 wegzuſchaffen.

Dieſes geſchieht auf folgende Art.

Nämlich da $S^2 = \frac{ax}{2}$

ſo iſt $\frac{2S^2}{x} = a$

Nun ſubſtituire man dieſen Werth von a in die Formel 𝔊 aus VIII, ſo iſt

$$x = \frac{P^2}{2\left(\frac{2S^2}{x}\right) + 2P} = \frac{P^2}{\frac{4S^2}{x} + 2P}$$

$$x = P^2 : \left(\frac{4S^2 + 2Px}{x}\right)$$

$$x = P^2 \cdot \frac{x}{4S^2 + 2Px}$$

$$1 = \frac{P^2}{4S^2 + 2Px}$$

$$4S^2 + 2Px = P^2$$

$$2Px = P^2 - 4S2$$

$$x = \frac{P^2 - 4S^2}{2P} = \frac{P}{2} - \frac{2S^2}{P}$$

Fig. 101 und 105.

XIII) Man ſoll ein rechtwinkliges △ verzeichnen, deſſen Hypothenuſe gegeben iſt, welches einem gegebenen Quadrate an Flächen-Inhalt gleich ſeyn ſoll.

Es ſey die Hypothenuſe = G

die geſuchte Höhe des △ = x

die Seite des gegebenen □ = a

So muß $a^2 = \frac{G}{2} \cdot x$

woraus $\frac{G}{2} : a = a : x$

Man ſuche alſo nur zu der halben Hypothenuſe und der Seite des Quadrats eine dritte Proportionale, wie es an Fig. 101 a und b geſchehen iſt, errichte ſodann über der gegebenen Hypothenuſe (Fig. 105.) AC = G den Halbkreis AEC, und an ſolchem die gefundene Pro-

portionale $x = AD$ als Senkrechte, ziehe $DE \# AC$, ſo iſt AEC das geſuchte $\triangle$.

Denn da $x = AD = EB$

und $G = AC$

ſo iſt nun, da $\frac{G}{2} : a = a : EB$ a. d. C.

oder $\frac{AC}{2} : a = a : EB$

woraus $\frac{AC \cdot EB}{2} = a^2$

w. z. e. w.

Fig. 134.

XIV) Es ſoll erwieſen werden, daß, wenn man an einem Trapezoid ABCD alle vier Seiten, jede in zwei gleiche Theile theilt, und die Verbindungslinien GF, GH, HE und EF zieht, dieſe Linien ein Parallelogramm bilden, und daß dieſes Parallelogramm an Flächen-Inhalt halb ſo groß iſt, als das gegebene Trapezoid.

1) Beweis, wegen der Conſtruktion iſt

$AB : AF = DB : DE$

deßhalb $\triangle ABD \sim \triangle FBE$

und $AD \# FE$ (A

Ferner iſt $AC : AG = DC : DH$ a. d. C.

und nun $\triangle ADC \sim \triangle GHC$

und $AD \# GH$ (B

Alſo auch $FE \# GH$ wegen A und B

Eben ſo iſt $AB : AF = AC : AG$

und nun $\triangle GAF \sim \triangle CAB$

und auch GF # BC (C

Endlich noch DC : DH = DB : DE

daher auch △ CBD ∾ △ HED

und HE # BC (D

Alſo auch GF # HE aus C und D

Da nun je zwei und zwei Seiten mit einander # laufen, ſo iſt auch die Figur GFEC ein Parallelogramm.

2) Beweis, daß GFEH = $\frac{1}{2}$ ABCD.

Aus vorigem Beweiſe folgt, daß

FE = GH

und FG = EH

Ferner iſt wegen der im Beweiſe 1) dargethanen Aehnlichkeit der △△ und wegen der Conſtruktion

△ ACB : △ AGF = $AC^2 : AG^2$

oder △ ACB : △ AGF = $(2)^2 : (1)^2$

d. i. △ ACB : △ AGF = 4 : 1

woraus △ AGF = $\frac{1}{4}$ ACB (A

Auf eben dieſe Art findet man

△ FBE = $\frac{1}{4}$ ABD (B

△ HDE = $\frac{1}{4}$ BCD (C

und △ HCG = $\frac{1}{4}$ ADC (D

woraus △ AGF + △ HED = $\frac{ACB + BCD}{4}$

E) = $\frac{ABCD}{4}$, A und C addirt

eben ſo △ FBE + △ HCG = $\frac{ABD + ADC}{4}$

F) = $\frac{ABCD}{4}$, B und D addirt

endlich $\triangle$ AGF + $\triangle$ HED + $\triangle$ FBE + $\triangle$ HCG

$$= \frac{ABCD}{4} + \frac{ABCD}{4} = \frac{ABCD}{2}$$

w. z. e. w.

Denn wenn die vier abgeſchnittenen $\triangle\triangle$ die Hälfte des Trapezoiden ausmachen, ſo muß auch das Parallelogramm die andere Hälfte enthalten.

XV) Es iſt eine Kreisfläche gegeben, welche den Durchmeſſer d hat; man ſoll die Seite eines Quadrats von gleichem Flächen-Inhalte finden.

Es ſey die Seite des geſuchten $\square = x$, ſo iſt

$$x^2 = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$x^2 = \frac{d}{2} \sqrt{3,1415926536}$$

$$x = \frac{d}{2} . 1,77245 = d . 0,88622$$

$$= \frac{d . 88622}{100000}$$

Wenn man nun dieſen gebrochenen Coefficienten von d nach den Regeln der Ketten-Brüche verwandelt, ſo erhält man $\frac{88622 . d}{100000} = \frac{39d}{44} = x$

Man kann nun vermöge dieſes Ausdrucks jeden Kreis in ein Quadrat verwandeln und die Seite deſſelben finden, wenn man den Diameter mit 39 multiplizirt, und das Produkt durch 44 dividirt.

XVI) Es iſt die Seite eines gleichſeitigen Dreiecks gegeben, man ſoll daraus die Seite eines regelmäßigen Sechsecks finden, welches jenem an Flächen-Inhalte = iſt.

Ich will hier den Flächen-Inhalt aus den Seiten, ohne ſolchen zu entwickeln, angeben; da ich überzeugt bin, daß jeder leicht ſelbſt dieſe Formeln finden wird, wenn ich auch keinen Fingerzeig, wie und wo bereits davon gehandelt worden iſt, gebe.

Wenn die Seite eines gleichſeitigen $\triangle = b$,

ſo iſt deſſen Flächen-Inhalt $S = \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$

und wenn die Seite eines regelmäßigen Sechsecks $= x$

ſo iſt deſſen Flächen-Inhalt $= \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3}$

Alſo ſoll ſeyn $\frac{1}{4} b^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3}$

$$\frac{b^2}{4} = \frac{3x^2}{2}$$

$$2b^2 = 12x^2$$

$$x^2 = \frac{b^2}{6}$$

$$x = b\sqrt{\tfrac{1}{6}} = b\sqrt{\tfrac{6}{36}} = \frac{b}{6}\sqrt{6}$$

XVIII) Es iſt ein unregelmäßiges Vieleck von dem Flächen-Inhalte S gegeben; man ſoll die Seite eines regelmäßigen Sechsecks von gleichem Flächen-Inhalt finden.

So iſt hier $\frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} = S$

woraus man dann auf dem gewöhnlichen Wege algebraiſcher Auflöſungen findet

$$x = \tfrac{1}{3} \sqrt[4]{12 S^2}$$

XVIII) Man ſoll ein regelmäßiges Achteck verzeichnen, welches einen gegebenen Flächen-Inhalt S enthält.

Nun iſt der Flächen-Inhalt eines Achtecks, deſſen Seite $= x$, $= 2x^2 (1 + \sqrt{2})$

Daher nun $2x^2 (1 + \sqrt{2}) = S$

$$x^2 (2 + 2\sqrt{2}) = S$$

$$x^2 = \frac{S}{2 + 2\sqrt{2}}$$

$$x^2 = \frac{(2 - 2\sqrt{2})\,S}{(2 + 2\sqrt{2})\,(2 - 2\sqrt{2})} = \frac{(2 - 2\sqrt{2})\,S}{-4}$$

$$= \frac{-2S}{4} + \frac{2S\sqrt{2}}{4} = \frac{2S}{4}(-1 + \sqrt{2})$$

$$= \tfrac{1}{2}S\,(-1 + \sqrt{2})$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}S\,(-1 + \sqrt{2})}$$

XIX) Es ſoll ein regelmäßiges Siebeneck verzeichnet werden, welches einem gegebenen Flächenraum = iſt.

Da das Siebeneck ſich nicht algebraiſch ausdrücken läßt, ſo verfährt man hier folgender Geſtalt.

Man verzeichnet ein regelmäßiges Siebeneck in einem Kreiſe von beliebigem Durchmeſſer, und berechnet den Flächen-Inhalt deſſelben; ſodann ſchließt man:

der gefundene Flächen-Inhalt verhält ſich zu dem gegebenen, wie das Quadrat der Seite des verzeichneten zum Quadrat der Seite des geſuchten; oder wie das Quadrat des angenommenen Halbmeſſers zu dem Quadrate des geſuchten.

In beiden Fällen wird es dann nicht ſchwer werden, das geſuchte Siebeneck zu verzeichnen; doch müßte man im erſten Falle den Transporteur zu Hülfe nehmen, um den Polygon-Winkel zu verzeichnen, im zweiten aber könnte das Verlangte durch Verſuche gefunden werden.

XX) Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, daß der Flächen-Inhalt eines gegebenen ſich zu dem des gezeichneten wie p : q verhält; z. B. wie 16 : 9.

Es ſey die Seite des gegebenen Vielecks = a
und die des geſuchten - - = x

ſo iſt $a^2 : x^2 = p : q$

$$\text{woraus } x = \sqrt{\frac{a^2 q}{p}} = \sqrt{\frac{a^2 pq}{p^2}} = \frac{a}{p} \sqrt{pq}$$

oder es ſey die Seite des gegebenen Vielecks $a = 27$, ſo iſt nun

$$(27)^2 : x^2 = 16 : 9$$

$$x = \sqrt{\frac{(27)^2 \cdot 9}{16}} = \frac{27 \cdot 3}{4} = \frac{81}{4} = 20,25$$

Fig. 133.

XXI) Es iſt der Flächen-Inhalt = S eines rechtwinkligen Dreiecks, und die Summe aller drei Seiten = P gegeben; man ſoll alle drei Seiten beſtimmen.

Es ſey die Hypothenuſe = x, die eine Kathete = w, die andere Kathete = z, ſo iſt

$$\frac{wz}{2} = S$$

$$\text{woraus } w = \frac{2S}{z} \quad (\mathfrak{A}$$

$$\text{Ferner iſt } x + w + z = P$$

$$\text{d. i. } x + \frac{2S}{z} + z = P \text{ aus } \mathfrak{A}$$

$$x = P - \frac{2S}{2} - z$$

$$x = \frac{Pz - 2S - z^2}{z} \quad (\mathfrak{B}$$

$$\text{Endlich iſt } x^2 = w^2 + z^2$$

$$\text{d. i. } x^2 = \left(\frac{2S}{z}\right)^2 + z^2$$

$$x^2 = \frac{4S^2}{z^2} + z^2$$

$$x^2 = \frac{4S^2 + z^4}{z^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{4S^2 + z^4}{z^2}} \qquad (C$$

Aus B und C folgt

$$\frac{Pz - 2S - z^2}{z} = \sqrt{\frac{4S^2 + z^4}{z^2}}$$

$$\frac{P^2z^2 + 4S^2 + z^4 - 4PSz - 2Pz^3 + 4Sz^2}{z^2} = \frac{4S^2 + z^4}{z^2}$$

$$P^2z^2 + 4S^2 + z^4 - 4PSz - 2Pz^3 + 4Sz^2 = 4S^2 + z^4$$

$$P^2z^2 - 4PSz - 2Pz^3 + 4Sz^2 = 0$$

$$P^2z - 4PS - 2Pz^2 + 4Sz = 0$$

$$2Pz^2 - P^2z - 4Sz = -4PS$$

$$z^2 - z\left(\frac{P^2 + 4S}{2P}\right) = -2S$$

$$z^2 - z\left(\frac{P^2 + 4S}{2P}\right) + \left(\frac{P^2 + 4S}{4P}\right)^2 = \frac{P^4 + 8P^2S + 16S^2}{16P^2} - 2S$$

$$z - \left(\frac{P^2 + 4S}{4P}\right. = \sqrt{\frac{P^4 + 8P^2S + 16S^2 - 32P^2S}{16P^2}}$$

$$z = \frac{P^2 + 4S}{4P} \pm \sqrt{\frac{16S^2 - 24P^2S + P^4}{16P^2}}$$

$$z = \frac{P^2 + 4S \pm \sqrt{16S^2 - 24P^2S + P^4}}{4P} \qquad (D$$

Nun iſt vermöge A

$$w = \frac{2S}{z}$$

$$\text{Alſo } w = 2S : \frac{P^2 + 4S \pm \sqrt{16S^2 - 24P^2S + P^4}}{4P}$$

$$w = \frac{8SP}{P^2 + 4S \pm \sqrt{16S^2 - 24P^2S + P^4}} \quad (\text{E}$$

Da nun zwei Seiten des Umfanges und dieſer ſelbſt bekannt ſind, ſo iſt es nicht nöthig, die dritte Seite zu finden, weil dieſe nun von ſelbſt bekannt wird

Es ſey z. B. der Flächenraum eines ſolchen Dreiecks $= 6\square' = S$, und der Umfang $P = 12'$, ſo iſt, wenn man dieſe Werthe in D ſtellt

$$z = \frac{(12)^2 + 4.6 + \sqrt{16.6.6 - 24.12.12.6 + 12.12.12.12}}{4.12}$$

$$z = \frac{12.12. + 2.12 + \sqrt{4.4.6.6 - 12.2.12.12.6 + 12.12.12.12}}{4.12}$$

$$z = \frac{12.12 + 2.12 + 4.6}{4.12} = \frac{12 + 2 + 2}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Stellt man ferner die Werthe in A, ſo iſt

$$w = \frac{2S}{z} = \frac{2.6}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

woraus nun endlich, da

$$P = w + x + z$$

$$12 = 3 + x + 4$$

$$12 - 3 - 4 = x$$

$$5 = x$$

Würde man hier $P = 74$, und $S = 108$ ſetzen, ſo fände ſich $z = 9$, $w = 24$ und $x = 41$.

Man kann ſich hier noch eine Menge Aufgaben ſelbſt geben, wenn man zuerſt die drei Seiten eines rechtwinkligen △ ſucht, ſie addirt, die Summe für P annimmt

und ſodann den gefundenen Flächen-Inhalt = S ſetzt, und x, z und w auf die eben gezeigte Art berechnet.

Anmerkung. Die vorhergehenden Aufgaben waren größtentheils von der Art, daß ſie durch algebraiſche Darſtellung entwickelt werden konnten und alſo algebraiſch geometriſche Aufgaben. Die folgenden werden meiſtens ſolche ſeyn, welche durch Conſtruktion aufgelöſt, und deren Richtigkeit durch Beweiſe dargethan werden muß.

Fig. 135.

XXII) Ein △ ABC ſoll durch einen gegebenen Punkt F in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Aufloſung.

Man theile die Seite, in welcher der Punkt F liegt, in zwei gleiche Theile in E, und verbinde ſowohl E als F mit der Spitze des gegenüber liegenden Winkels B, ziehe zu FB aus E die # ED, und verbinde D mit F, ſo iſt ABDF = △ FDC

Beweis:

Denn es iſt △ BAE = △ BCE } wegen gleich. Grundl.
und auch △ DBE = △ DEF } und Höhe u. d. Conſtr.

Aus letzterm folgt
DOB + ODE = FOE + ODE

nämlich △ DOB = △ FOE
und nun auch
△ BAE — FOE = △ BCE — DOB

d. i. ABOF = EODC

und auch
ABOF + DOB = EODC + FOE

d. i. ABDF = △ FDC

w. z. e. w.

Fig. 136.

XXIII) Ein △ ABC ſoll aus dem Punkte D in drei gleiche Theile getheilt werden.

Aufloͤſung.

Man theile die Seite, worin der Punkt D liegt, in drei gleiche Theile, und verbinde ſowohl D als auch die Theilungspunkte E und F mit dem Scheitel des gegenuͤber liegenden Winkels B, ziehe ferner aus E, EH, und aus F, FG ♯ DB, verbinde H und G mit D, ſo iſt

AHD = HBGD = DGC.

Beweis:

Es iſt △ ABE = △ EBF = △ FBC = $\frac{1}{3}$ ABC aus der Conſtrukt.

Nun iſt aber HED = HEB, wegen = Grundl. und Hoͤhe.

d. i. △ O + △ M = △ O + △ N

Alſo auch △ M = △ N

Daher AHIE + △ M = AHIE + △ N

d. i. △ ABE = △ AHD = $\frac{1}{3}$ ABC

Eben ſo iſt auch BGF = DGF, wegen = Grundl. u. Hoͤhe

d. i. △ R + △ P = △ R + △ Q

Alſo noch △ P = △ Q

Daher CGKF + △ P = CGKF + △ Q

d. i. △ FBC = △ DGC = $\frac{1}{3}$ ABC

Wenn nun △ AHD = $\frac{1}{3}$ ABC

und △ DGC = $\frac{1}{3}$ ABC

ſo iſt auch HBGD = $\frac{1}{3}$ ABC

w. z. e. w.

Fig. $137\frac{1}{2}$.

XXIV) Ein △ ſoll in drei gleiche Theile getheilt werden, daß die Theilungslinien in einem Punkte im △ zuſammen laufen, und übrigens in den Spitzen der Winkel eintreffen.

Aufloͤſung.

Man theile die eine Seite AC in drei gleiche Theile und ziehe BF, und aus F die ♯ FE zu AB, theile FE in zwei gleiche Theile in D, ſo iſt D der Theilungspunkt, aus welchem die Theilungslinien DC, DB und DA gezogen werden.

Beweis:

Es iſt △ ABF = $\frac{1}{3}$ △ ABC a. d. Conſtr.

Nun iſt aber △ ABF = △ M + △ N (A

Da nun △ N + △ Q = △ P + △ Q

ſo iſt auch △ N = △ P

Alſo auch in A,

△ ABF = △ M + △ P

d. i. △ ABF = △ ABD = $\frac{1}{3}$ ABC

So iſt nun auch ADBCA = $\frac{2}{3}$ ABC (B

Nun iſt △ (N + Q) = △ R, gleiche Grundlinien zwiſchen zwei ♯

eben ſo iſt △ T = △ S

Alſo nun △ (N + Q + T) = △ (R + S)

d. i. △ ADC = △ BDC = $\frac{1}{2}$ ADBCA

und vermoͤge B, △ ADC = △ BDC = $\frac{1}{3}$ ABC

Fig. 137.

XXV) Zwei Bruͤder erben einen großen Garten, der eine dreieckige Figur ABC hat, und ſollen ſolchen in

zwei gleiche Theile theilen. Da aber auch vom Gartenhauſe, welches in F liegt, jeder die Hälfte erhalten ſoll, ſo wollen ſie die Theilung ſo vornehmen, daß das Gartenhaus einen Gränzpunkt ausmacht; wie wird nun die Gränze laufen?

Aufloͤſung.

Man theilt die Seite AC in zwei gleiche Theile in D, und verbindet den Theilungspunkt D mit F, zieht aus B zu FD die # BF, ſo iſt EFB die Theilungslinie, und ABFE = EFBC.

Beweis:

Denn es iſt △ ABD = △ BDC, a. d. Conſtr.

Da nun FD # BE

ſo iſt auch △ FDB = △ FDE

d. i. △BOF + △FOD = △EOD + △FOD

nämlich △BOF = △EOD

Alſo nun △ABD − △EOD + △FOB = △BDC − △FOB + EOD

d. i. ABFE = EFBC

w. z. e. w.

Fig. 138.

XXVI) Man ſoll das △ ABC in zwei gleiche Theile theilen, ſo daß die Theilungslinie mit der Grundlinie # äuſt.

Aufloͤſung.

Man theile eine Seite, z. B. BC in zwei gleiche Theile in F, und ſuche zu BF und BC eine mittlere Proportionale BE, und ziehe die Theilungslinie DE # AC, ſo iſt

BDE = ADEC

Beweis:

$BC : BE = BE : BF$ a. d. Conſtr. (A

woraus $BE^2 = BC . BF$ (B

Aus A iſt nun auch

$BC^2 : BE^2 = BE^2 : BF^2$ (C

ſtellt man nun den Werth von BE^2 aus B in C, ſo iſt

$BC^2 : BE^2 = BC . BF : BF . BF$

d. i. $BC^2 : BE^2 = BC : BF$ (D

Da ſich nun ähnliche △△ zu einander verhalten, wie die □□ ihrer gleichnahmigen Seiten, ſo iſt auch

$\triangle ABC : \triangle DBE = BC^2 : BE^2$ (E

Alſo $\triangle ABC : \triangle DBE = BC : BF$ aus D und E

Da aber $BF = \frac{1}{2} BC$ a. d. C.

und nun $\triangle ABC : \triangle DBE = BC : \frac{1}{2} BC$

d. i. $\triangle ABC : \triangle DBE = 1 : \frac{1}{2}$

Folglich $\triangle DBE = \frac{1}{2} \triangle ABC$

w. z. e. w.

Fig. 139.

XXVII) Ein Trapezium ABCD ſoll durch eine mit der Grundlinie ‡ laufende Linie in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Aufloſung.

Man verlängere die beiden nicht ‡ laufenden Seiten, bis ſich ſolche in G ſchneiden, errichte in G die ! GH = GB, und ziehe die Hypothenuſe AH; über AH ziehe man den Halbkreis AIH, und theile ſolchen in I in zwei gleiche Theile, ziehe IA und IH, und mache GE = GF = IA = IH; endlich ziehe man EF, ſo iſt

BCEF = ADEF.

Beweis:

Es iſt hier $AH^2 = HI^2 + AI^2$

und da $HI = AI$

ſo iſt auch $AH^2 = 2HI^2$ (A

und nun $2HI^2 = HI^2 + AI^2$

Es iſt aber auch $AH^2 = HG^2 + AG^2$

und da $HG = BG$

alſo auch $AH^2 = BG^2 + AG^2$ (B

aus A und B, $2HI^2 = BG^2 + AG^2$

oder $HI^2 + HI^2 = BG^2 + AG^2$ (C

Wenn man nun die Gleichung C in eine arithmetiſche Proportion auflöſet, ſo iſt

$$AG^2 \div HI^2 = HI^2 \div BG^2$$

Da nun übrigens $HI = GE$ aus der Conſtr.

ſo folgt, daß $AG^2 \div GE^2 = GE^2 \div BG^2$

Nun verhalten ſich ähnliche △△ wie die □□ ihrer gleichnahmigen Seiten. Da nun die □□ der Seiten AG, GE, GB in einer ſtätigen arithmetiſchen Proportion ſtehen: ſo folgt, daß auch die △△ AGD, EGF und BGC in einer eben ſolchen Proportion ſtehen, d. h. daß ſie gleiche Differenzen haben; nämlich

$$\triangle AGD \div \triangle EGF = \triangle EGF \div \triangle BGC$$

woraus $\triangle AGD - \triangle EGF = \triangle EGF - \triangle BGC$

d. i. $ADEF = BCEF$

w. z. e. w.

Fig. 140.

XXVIII) Ein gegebenes Trapezoid **ABCD** in zwei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie HI mit einer Seite AD ⌗ laufe.

Aufloͤſung.

Man verlaͤngere die Seiten AB und DC bis ſie ſich in G ſchneiden, ziehe die Diagonale DB, und zu ſolcher aus C die ⌗ CE. Ferner theile man AE in zwei gleiche Theile in F, und errichte uͤber AG den Halbkreis, und in F die ⊥ FO. Endlich mache man HG = OG und ziehe die Theilungslinie HI ⌗ AD.

Beweis:

Da DB ⌗ EC a. d. Conſtr.

ſo iſt auch △DCE = △BCE

und auch △DCN = △BEN, wie mehrmal erw.

und deßhalb nun △ADE = ABCD (C

Nun iſt ferner

△ADE − △ADF = ABCD − △ADF

d. i. △DEF = DCBF (A

nun iſt auch AF = FE a. d. Conſtr.

alſo auch △DFE = △ADF = ½△ADE (B

wegen A und B nun auch

DCBF = △ADF (F

und wegen C, ½ADE = ½ABCD

Nun iſt aber △AOG ∾ △FOG

daher AG : GO = GO : FG

Da nun GO = HG a. d. Conſtr.

ſo iſt auch AG : HG = HG : FG (D

Da nun AD ‡ HI

ſo iſt auch $\triangle$ADG ∾ $\triangle$HIG

weßhalb $\triangle ADG : \triangle HIG = AG^2 : HG^2$

Oder $\triangle ADG : \triangle HIG = AG.AG : HG.HG$ (E

Aus D und E wird

$ADG.AG : HIG.HG = AG.AG.HG : HG.HG.FG$

d. i. $\triangle ADG : \triangle HIG = AG.HG : HG.FG$

und $\triangle ADG : \triangle HIG = AG : FG$

Es iſt aber auch

$\triangle ADG : \triangle FDG = AG : FG$

woraus $ADG : ADG = HIG : FDG$

d. i. $\triangle HIG = FDG$

Nun iſt $HIG - BGC = FDG - BGC$

d. i. $HICB = FDCB$

Da nun $FDCB = ADF$ wegen F

ſo iſt auch $HICB = ADF$

Da nun $ADF = \frac{1}{2} ABCD$

ſo iſt auch $HICB = \frac{1}{2} ABCD$

und alſo auch $ADIH = \frac{1}{2} ABCD$

w. z. e. w.

Fig. 141.

XXIX) Man ſoll das Fünfeck ABCDE in ein $\triangle$ von gleichem Inhalte verwandeln.

Aufloͤſung.

Man ziehe die Diagonalen AC und EC, und hierzu aus B und D die ‡ ‡ BF und DG, und verlängere die Grundlinie, bis ſie dieſe ‡ ‡ in G und F ſchneidet; endlich verbinde man F und G mit C, ſo iſt

$ABCDE = \triangle FCG.$

Beweis:

Es iſt △ BCF = △ BAF

d. i. △ O + △ P = △ Q + △ P

nämlich △ O = △ Q

Da nun △ O von dem Fünfeck abgeſchnitten, △ Q aber zugeſetzt iſt, ſo iſt auf dieſer Seite der Flächen-Inhalt unverändert geblieben. Eben ſo iſt auf der andern Seite △ M = △ N

Alſo auch ABCDE = △ FCG

w. z. e. w.

Fig. 142.

XXX) Ein Polygon ABCEDF mit einem eingehenden ∟ ſoll in ein △ verwandelt werden, welches gleichen Flächen-Inhalt mit jenem hat.

Auflöſung.

Man ſchließe den eingehenden ∟ durch die Gerade EF, und ziehe hierzu die ♯ DN vom Scheitel dieſes ∟ nach der Grundlinie, ferner die Diagonale EN; nun verbinde man N mit C, und ziehe hierzu die ♯ EO nach der verlängerten Grundlinie, und noch die Diagonale CO; auf der andern Seite verfahre man wie in voriger Aufgabe, ſo iſt

ABCEDF = △ HCO.

Beweis:

△ BRC = △ AHR, wie im vorigen Beweiſe, mithin auf dieſer Seite nichts verändert.

Ferner iſt △ DEN = DFN

d. i. DEP + DNP = FNP + DNP

d. i. A, △ DEP = △ FNB (B

Nun iſt von der Figur A der vorigen Gleichung zugeſetzt und B abgeſchnitten worden, folglich

HCEN = HCEDF

Nun iſt aber wieder, wie in voriger Aufgabe

(C) $\triangle$ GEQ = $\triangle$NOQ (D

Da nun C abgeſchnitten und dafür ſein gleiches D zugeſetzt worden, ſo iſt auch hierdurch HCEN nicht verändert; alſo auch nun

HCEN = HCO

nämlich HCEDF = HCO

und endlich ABCEDF = HCO

w. z. e. w.

XXXI) Ein Trapezoid ABCD ſoll in zwei gleiche Theile getheilt werden, wo es nicht darauf ankömmt, welche Lage und Richtung die Theilungslinie hat.

Aufloſung.

Man ziehe zu AD aus B die # BH, theile ſolche in zwei gleiche Theile, und ziehe GC und GF, ſo iſt

ABCGF = DCGF

Den Beweis hierzu wird auch wohl der Anfänger ſich ſelbſt machen können.

Fig. 144.

XXXII) Ein Trapezoid durch eine aus einem ∟ gezogene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufloſung.

Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, theile AC in E in zwei gleiche Theile, und ziehe aus E zu BD die # EF, verbinde B mit F, ſo iſt

ABFD = BCF

Beweis:

Es iſt △ ABE = △ BCE } a. d. E.
und auch △ AED = △ CED

Daher AED + ABE = CED + BCE

d. i. ABED = CBED

Ferner iſt △ BEO = △ FDO, wie im vorigen Beweiſe

Alſo ABED — BEO + FDO
= CBED — FDO + BEO

d. i. ABFD = BCF

w. z. e. w.

Fig. 145.

XXXIII) Ein Trapezoid dergeſtalt in zwei gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinie durch einen in einer Seite gegebenen Punkt H geht.

Aufloͤſung.

Man verwandle zuerſt das Trapezoid nach Aufgabe XXIX in das △ ABF, theile die Grundlinie AF in E in zwei gleiche Theile, und verbinde E und den gegebenen Punkt H mit B, ziehe zu BH aus E die ∥ EG und verbinde H mit G, ſo iſt

ABGH = DCGH.

Beweis.

△ ABE = △ FBE

Da nun △ ABF = ABCD nach mehr erwaͤhnter Verwandlung.

ſo iſt auch △ FBE = DCBE

und auch DCBE = △ ABE

Ferner iſt △ BGE = △ HGE

d. i. BGO + OGE = HEO + OGE

Alſo BGO = HEO

Und nun DCBE — BGO + HEO
= ABE — HEO + BGO

d. i. ABGH = DCGH

w. z. e. w.

Fig. 146.

XXXIV) Ein Fünfeck durch Linien, die ſich in einem ∟ vereinigen, in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflöſung.

Man verwandle zuerſt das Fünfeck in ein Dreieck, wie in Aufgabe XXIX, theile die Grundlinie FG in drei gleiche Theile, und ziehe CH und CI, ſo iſt

ABCH = HCI = EDCI = $\frac{1}{3}$ ABCD.

Beweis:

Es iſt △ FCG = ABCDE nach Nr. XXIX.

d. i. FCH + HCI + ICG = ABCH + HCI + EDCI

nun iſt FCH = HCI = ICG, a. d. Conſtr.

Ferner iſt BCN = FAN und CDM = EGM } nach früheren Beweiſen und XXIX. (A (B

Alſo ACH + NAC + BNC = ACH + NAC + FAN

d. i. wegen A, ABCH = FCH

Eben ſo findet man mit Hülfe von B
EDCI = ICG

Alſo auch ABCH = HIC = EDCI = $\frac{1}{3}$ABCD

w. z. e. w.

Fig. 147.

XXXV) Von dem △ABC ſoll ein kleineres △ abgeſchnitten werden, welches an Flächen-Inhalte einem an-

dern gegebenen △ = iſt, die Theilungslinie aber mit einer Seite von ABC # läuft.

Auflöſung.

Man ſuche zur Höhe CP, zur Höhe GE und Grundlinie FD eine vierte Proportionale, und trage ſolche von A nach B, nämlich = AQ, auf. Ferner ſuche man zwiſchen AB und AQ eine mittlere Proportionale, und trage ſolche von A nach B, nämlich = AN, auf, ziehe NO # BC, ſo iſt △ANO = △ ACQ = EFD.

Beweis:

Es iſt CP : EG = FD : AQ a. d. Conſtr.

woraus CP . AQ = EG . FD

und auch $\frac{CP \cdot AQ}{2} = \frac{EG \cdot FD}{2}$

d. i. △AQC = △ FED (A

Ferner iſt AB : AN = AN : QA a. d. C.

woraus AB . AQ = AN^2 (B

Da nun NO # BC

ſo iſt △ ABC ∾ △ ANO

und deßhalb ABC : ANO = AB^2 : AN^2

und vermöge B

ABC : ANO = AB . AB : AB . AQ

nämlich ABC : ANO = AB : AQ

Nun iſt aber auch

ABC : AQC = AB : AQ, wegen = Grundlinien und Höhe.

woraus nun ABC : ABC = ANO : AQC

d. i. △AQC = △ANO (C

Aus A und C aber $\triangle$ ANO $= \triangle$ **FED**

w. z. e. w.

Fig. 148.

XXXVI) Ein Parallelogramm ſoll in drei gleiche Theile getheilt werden, daß die Theilungslinien in einem Punkte A zuſammen laufen.

Aufloͤſung.

Man theile BD und auch **DE** jede in drei gleiche Theile, ziehe vom zweiten Theilungspunkte G, und eben ſo von F die Linien GA und FA, ſo iſt

$$ABG = AGDF = AFE.$$

Beweis:

Hier iſt ABD $=$ AED $= \frac{1}{2}$ ABDE, a. d. Conſtr.

Nun iſt aber ABD : ABG $=$ 3 : 2 } wegen Eintheil. (A
und auch AED : AEF $=$ 3 : 2 } der Grundl. (B

Aus A folgt ABG $= \frac{2}{3}$ ABD

und aus B, AEF $= \frac{2}{3}$ AED

da nun ABD $= \frac{1}{2}$ ABDE

ſo iſt auch ABG $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ABDE $= \frac{1}{3}$ ABDE (C

Ferner, da auch AED $= \frac{1}{2}$ ABDE

ſo iſt auch AEF $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ABDE $= \frac{1}{3}$ ABDE (D

Da nun ABDE $=$ ABG $+$ AGDF $+$ AEF

ſo iſt aus C und D

ABDE $= \frac{1}{3}$ ABDE $+$ AGDF $+ \frac{1}{3}$ ABDE

d. i. ABDE $= \frac{2}{3}$ ABDE $+$ AGDF

und ABDE — $\frac{2}{3}$ ABDE = AGDF
woraus $\frac{1}{3}$ ABDE = AGDF (E

und ſomit durch C, D und E die Richtigkeit erwieſen.

Fig. 149.

XXXVII) Von einem △ ABC ſollen aus zwei gegebenen Punkten N und O zwei Stücke abgeſchnitten werden, welche einen gewiſſen Theil des △, z. B. $\frac{4}{9}$, übrig laſſen. Nämlich es ſoll

NLBZO = $\frac{4}{9}$ ABC werden.

Auflöſung.

Man theile die Grundlinie AC in neun gleiche Theile, ziehe aus dem dritten Theilungspunkte D und aus dem ſiebenten F die Linien DB und FB, ſo daß ABD = $\frac{3}{9}$ ABC, DBF = $\frac{4}{9}$ ABC und FBC = $\frac{2}{9}$ ABC werde; nun verwandle man das mittlere △ DBF auf die ſchon mehr gezeigte Art in das Fünfeck NLBZO, ſo iſt die Aufgabe gelöſt und der Beweis ſehr leicht zu machen, weßhalb ich ihn gar nicht anführen, ſondern nur die Anfänger darauf aufmerkſam machen will, daß

△ BLD = △ NLD
und △ FZO = △ FZB.

woraus ſich ſodann das Uebrige ergibt.

Fig. 150.

XXXVIII) Die fünfſeitige Figur ABCDE ſoll in vier gleiche Theile getheilt werden.

Auflöſung.

Man ſuche den Flächen-Inhalt der Figur und dividire ſolchen durch 4, ſo erhält man den Inhalt eines Theils deſſelben. Ferner ſuche man auch den Inhalt des △ ABC und ziehe dieſen von $\frac{1}{4}$ der Figur ab, in den Reſt dividire man mit $\frac{1}{2}$ AC: ſo iſt der Quotient die Höhe eines △s, welches mit dem △ ABC zuſammengenommen $\frac{1}{4}$ der Figur ausmacht. Dieſe gefundene Höhe

trage man als Senkrechte a b irgendwo auf A C auf, und ziehe durch b zu AC die ⋕ F G, und verbinde G mit A, ſo iſt ABCG = $\frac{1}{4}$ ABCDE.

Wollte man nun die übrigen Theile dreieckig haben, ſo führe man auf eine ähnliche Art fort. Wir wollen aber annehmen, daß die Theile vierſeitig ſeyn ſollen, wo man ſodann auf nachſtehende Art verfährt.

Man bildet nämlich von nun an lauter △△, welche $\frac{1}{8}$ der Figur enthalten und zwei ſolcher Achttheile einen verlangten Theil geben. In $\frac{1}{8}$ ABCDE dividire man alſo nun mit $\frac{1}{2}$ AG, ſo iſt der Quotient die Höhe eines △s, welches $\frac{1}{8}$ ABCD enthält. Dieſe Höhe trage man als Senkrechte cd irgendwo auf AG auf, und ziehe durch d die ⋕ HI, verbinde H mit G, ſo iſt △ AGH = $\frac{1}{8}$ ABCDE. Ferner dividire man mit $\frac{1}{2}$HG in $\frac{1}{8}$ der Figur, ſo erhält man die Höhe ef, zieht die ⋕ IN, ſo iſt auch HGI = $\frac{1}{8}$ABCDE, und AHIG = $\frac{1}{4}$ABCDE. Ganz auf dieſelbe Art erhält man nun auch HION = $\frac{1}{4}$ABCDE, und es wird ſodann augenſcheinlich auch NODE = $\frac{1}{4}$ABCDE übrig bleiben. Der Beweis hierüber liegt in der Auflöſung ſelbſt.

Fig. 151.

XXXIX) Es iſt ein ∟ ABC = 85° gegeben, man ſoll einen andern von 25° = ABD davon abſchneiden.

Aufl öſung.

Mit willkührlicher Zirkel-Eröffnung beſchreibe man auf dem einen Schenkel BC ein gleichſeitiges △ BFE und verlängere BF, ſo wird ABD = 25° werden, weil wegen des gleichſeitigen △ der ∟ FBE = 60°, und 60 + 25 = 85° = ABC iſt.

XXXX) Der ∟ ABC = 95° iſt gegeben, man ſoll einen ∟ ABE = 50° davon abſchneiden.

Aufloſung.

Fig. 152.

Von beliebiger Länge ſchneide man BD auf dem einen Schenkel BC ab, und errichte in D eine ! DE = BD und ziehe BE, ſo iſt ∟ ABE = 50°, weil das rechtwinklige △ BED auch gleichſchenklig, und deßhalb ∟ BED = ∟ EBD = 45°, und 45° + 50° = 95° iſt.

Fig. 41.

XXXXI) Es ſey an Figur 41. durch die 4 zu erweiſen, daß ∟ ABH ein rechter ∟ iſt.

Beweis:

Da vermöge der §. 46. angegebenen Conſtruktion das △ LBC gleichſeitig iſt, ſo iſt auch jeder ∟ deſſelben = 60°, mithin der Neben ∟ BCH = 120°; da nun auch △ BCH gleichſchenklig, ſo iſt auch ∟ CBH $= \frac{180 - 120}{2} = 30°$, und nun ∟ ABH = ∟ LBC + ∟ CBH = 60° + 30° = 90°, und alſo ein rechter.

Fig. 153

XXXXII) Es iſt das gleichſchenklige △ ABF gegeben, und geſagt, daß AB die Seite eines regelmäßigen Achtecks, AF aber der Radius des umſchriebenen Kreiſes iſt; man ſoll unterſuchen, ob dieſes wirklich der Fall iſt, und die Richtigkeit erweiſen.

Aufloſung.

Man halbire AB in D und ziehe DF, mache nun DE = AD = ½ AB und ziehe AE; iſt nun AE = FE, ſo iſt AB die Seite eines regelmäßigen Achtecks, und FA der Radius des umſchriebenen, und FD der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes.

Beweis: Da AD = DE

ſo iſt △ ADE = ſchenklig (A

und da AD = DB
und △ AFB = ſchenklig } (B

ſo iſt auch $\triangle$ ADE rechtwinklig

mithin $\angle x = 90°$

und auch $\angle z + \angle y = 90°$

und da $\angle z = \angle y$, wegen A

ſo iſt auch $\angle z = \angle y = 45°$

mithin $\angle m = (180 - 45)° = 135°$

Alſo $\angle n + \angle o = (180 - 135)° = 45°$

Da aber auch $\triangle$ AEF = ſchenklig

ſo iſt auch $\angle o = \angle n = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}°$

Da nun $\angle n = \angle p$, wegen B

ſo iſt auch $\angle n + \angle p = (22\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2})° = 45°$

Da nun der Mittelpunkts $\angle$ im regelmäßigen Achteck 45° hat, und jedes gleichſchenklige $\triangle$, deſſen ungleicher $\angle$ 45° hat, zu einem Achtecke gehören kann: ſo kann auch um AFB aus F ein Kreis beſchrieben und ein Achteck verzeichnet werden; w. z. e. w.

Anmerkung. Ich glaube, durch die vorhergehenden Aufgaben meine Leſer ſo weit vorbereitet zu haben, daß es ſolchen nicht ſchwer werden wird, jede geometriſche Aufgabe zu löſen; und rathe nun „Meyer Hirſch's geometriſche Aufgaben" zur Hand zu nehmen, und ſolche von vorn an, mit Ausſchluß derer, wo die Trigonometrie angewendet wird, durchzunehmen und aufzulöſen, wodurch gewiß Jeder die gehörige Fertigkeit erlangen wird.

Schluß = Anmerkung zu dieſem Bande.

Eigentlich ſollte wohl hier noch das Kapitel von der Lage und Stellung der Ebenen nachfolgen; allein, da es mehr Einleitung in die Körpermeſſung iſt, und ich überdies dieſem Bande nicht gerne eine viel größere Bogenzahl, als den übrigen, geben möchte: ſo wird der VIte Band, welcher die Körpermeſſung enthält, das ebengedachte Kapitel als Einleitung erhalten.

Druckfehler
in den erſten vier Bånden dieſes Lehrbuchs.

Erſter Band.

Außer denen ſchon darin angegebenen ſind noch zu berichtigen.

Seite 13 Zeile 19 ſteht 16—6, ſoll heißen 15—6.

= = = 5 von unten, ſteht der Gróßere, ſoll heißen das Gróßere.

= 37 = 14 v. u. ſteht n poſitiver, heißt n poſitiven.

= 41 = 2 ꝛc. ſteht: geben ein poſitives ꝛc., ſoll heißen: geben einen poſitiven, ungleiche Zeichen einen negativen Quotienten.

= = = 4 v. u. bleiben im, ſoll heißen, bleiben aus dem.

= 43 = 9 ſteht $\frac{3cd}{2a^3b^3}$ heißt $\frac{3cdx^{-1}}{2a^3b^3}$

= 78 = 3 und 4 v. u. ſteht die Brúche, heißt, den Bruch.

= 107 = 4 ſteht denn, heißt den.

= = = 5 ſteht vermeiden, heißt vermindern.

= 165 = Die Wurzel des zweiten Beiſpiels iſt $x^2 - x + 1$, nicht -1.

= 182 = Iſt aber die gegebene Zahl ꝛc. gehórt nicht mehr zur Anmerkung und ſollte groß gedruckt ſeyn.

Seite 198 Zeile 1, heißt des, und nicht der vorhergehenden ꝛc.
= 203 = 1 ſetze = anſtatt des Zeichens + zwiſchen den beiden Wurzeln.
= 209 = 17 ſteht $\underline{2}\sqrt[6]{8} \cdot 2\sqrt[6]{9} = \underline{4}\sqrt[6]{8 \cdot 9} = \underline{4}\sqrt[6]{72}$,
ſoll heißen $\underline{3}\sqrt[6]{8} \cdot 2\sqrt[6]{9} = \underline{6}\sqrt[6]{8 \cdot 9} = \underline{6}\sqrt[6]{72}$
= 217 = 17 ſteht öfterer, heißt öfters.
= 227 letztes Beiſpiel des §. 130 ſteht $x^4\ (a^3 x^{-1} - a)$,
ſoll heißen $x^4\ (a^3 x^{-1} - a)^{\frac{3}{8}}$

Zweiter Band.

Seite 28 Zeile 24: Mit dem Nenner in die Brüche, ſoll heißen: mit dem Nenner der Brüche.
= 83 = 2, 3 und 4 des erſten Beiſpiels muß ſtehen 9 a ſtatt 2 a.
= 137 = 12 ſteht $\sqrt{\frac{1881}{676}}$ muß heißen $\sqrt{\frac{11881}{676}}$
= 157 = 2 v. u. ſteht 21000 x, heißt 2100 x.
= = = letzte, heißt $x = \frac{20}{21}$ Stunden.
= 169 = 5 ſteht $x^2 + 2xy + xy^2 + x + y = 2a$ und ſoll heißen $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 2a$
= 174 = 3 v. u. ſteht 4 — 4 — 1 — 2, ſoll heißen 4 — 1 — 2.
= 179 = 11 ſteht y + y, ſoll heißen x + y.

Dritter Band.

Seite 14 Zeile 3 ſteht $1 + \frac{1}{3}$, ſoll heißen $3 + \frac{1}{3}$.
= 26 = 5 = iſt der = = iſt d der.

Seite 29 Zeile 6 v. u. heißt es 1,000000 Umläufe.
= = = 10 = = nicht 27,321,661, ſond. 27,321661
= 50 = 7 ſteht — 5 D, ſoll heißen + 5 D.
= 59 = 13 = C = = F.
= 64 = 2 v. u. ſoll heißen 2 + B.
= = = 1 = = = = 19 + B.
= 65 = 1 = Vieh, und ꝛc., ſoll heißen: Vieh für 100 Thlr. und ꝛc.
= 75 = 6 ſoll heißen $\sqrt{\frac{4n^4+24n^2+36 \quad 48n^2}{n^4+6n^2+9}}$
= = = 9 = = : 2 ſtatt : 3
= = = 15 = = $(1)^3 - (-1)^3$
= 81 = 20 lies x und z für x und y.
= 96 = 19 = $a^2 - 5a$ für $a^2 = 5a$.
= 99 = 14 = 2dS für adS
= 102 = 21 = n für a
= = = letzte = $\frac{t^2}{d^2}$ = $\frac{t2}{d2}$
= 103 = 11 = $t^2 + dt$ für $t^2 - dt$.
= 110 = 23 = $d = \frac{1}{2}$ für $d = 1$
= 111 = letzte = x = — ſtatt x —
= 115 = 5 = x + 23 y ſtatt x 23 y.
= 126 = 6 = c — 2 b ſtatt c — 2.
= = = 13 = = a ſtatt =.
= 129 = 2 = $\frac{1}{3}$ ſtatt $\frac{2}{3}$.
= 135 = 17 = $\frac{1}{2}[n(n+1)]^2$ ſtatt $[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$
= 137 = 8 = neue Reihen, ſtatt neun Reihen.
= 150 = 25 ſteht ein Mal abd zu viel.
= 153 = 9 lies (n — 4) ſtatt (n — 4
= 161 = 17 = oben, ſtatt aber.
= 175 = 11 = eines Produktes, ſtatt ein Produkt.
= 185 = 5, 6, 8 und 11 ſteht 7824368 heißt 7823368.
= 190 = 1 lies nun, für und.

Seite 190 Zeile 16 und 17 lies $\frac{33}{40}$ ſtatt $\frac{33}{40}$

= 191 = 1 lies Zähler ſtatt Zahlen.

= = = 19 = 3,2296818 ſtatt 32296818.

= 198 = 4 = im Zähler — 5, ſtatt — 6.

= 206 = 10 = $(65536^2)^2$ ſtatt $(65536^2)^4$

= 207 = 26 untre Reihe heißt es: $9^7 = 1{,}480$ nicht 1,408

= 216 = 6 lies: die Richtigkeit, ſtatt von der Richtigkeit

= = = 25 lies 73,3376 ſtatt 733376.

= = = 27 = C ſtatt B.

= 219 = 4 ſetze hinter Zins auf Zins „zu 4 p. C."

= 220 = 21 = log 2a ſtatt og 2a.

= 223 = 1 ließ 16 Jahren, ſtatt 6 Jahren.

= = = 2 v. u. lies m log P + log A für m log P = log A.

= 226 = 8 v. u. lies 3,4615693 ſtatt 3,4625693.

= = = 7 = = = daſſelbe.

= 228 = 11, 13 und 26 lies log S ſtatt log 5.

= 230 = 5 v. u. ſetze ap] — log a ſtatt ap — log a.

= 235 = 6 ſetze $(1{,}035)^6 - 500$ ſtatt $(1{,}035)^6\ 500$.

= 237 = 11 = + log 0,05 ſtatt + 0,05.

Vierter Band.

Seite 6 Zeile 18 und 30 ſetze — b ſtatt — 6.

= 16 = 16 ſetze $o = \frac{aA}{-a}$ ſtatt $o = \frac{aA}{a}$

= 17 = 5 = $E = \frac{2}{a^4}$ ſtatt $C = \frac{2}{a^4}$

= 28 = 7 = $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$ ſtatt $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$

Seite 33 Zeile 14 ſetze $B + \frac{1}{a^2}$ ſtatt $B + a^{\frac{1}{2}}$

= 35 = 4 v. u. ſetze $B = \frac{1}{2b^2}$ ſtatt $Bb = \frac{1}{2b^2}$

= 40 = 1 im Nenner: $a^2x - x^3$ ſtatt $a^2x - x^2$

= 41 = 5 v. u. im Nen. $a^3x + x^4$ = $a^3x - x^4$

= = = 2 = = daſſelbe.

= = = letzte, $2a^2x$ ſtatt $2a^3x$

= 42 = 3 wie Z. 5 und 2, 41.

= 45 = 8 ſetze $\frac{4}{27}$ ſtatt $\frac{4}{47}$

= 55 = 7 ſetze am Schluſſe der Zeile =.

= 58 = 4 v. u. ſetze log 4 ſtatt og 4

= 63 = 14 ſetze 0,6931472 ſtatt 8,69 ꝛc.

= 64 = 2 = 1,3862944 ſtatt 0,386 ꝛc.

= = = 4 v. u. lies 0,8958797 ſtatt 0,896 ꝛc.

= = = 2 = = 1,03977208 ſtatt 1,03971 ꝛc.

= 71 = 15 ſetze $-\frac{1}{2}A^2$ ſtatt $-\frac{1}{2}A$.

= 91 = 13 = §. 310. Nro. 23. ſtatt 24.

= 92 = 10 = $-\frac{1}{3}n$ ſtatt $-{}^{1}\,n$.

= 93 = 4 v. u. $\frac{n^4 - n^3}{2}$ ſtatt $\frac{n^4 + n^3}{2}$

= = = 3 = = $+12n^3$ ſtatt $-12n^3$.

= = = 2 = = ſetze -6 ſtatt $-b$.

= = = letzte $+6$ ſtatt $+b$.

= 97 = 11 ſetze $\frac{3.6^3}{2.4.6.6^5}$ ſtatt $\frac{3.6}{2.4.6.6^5}$

= 98 = 5 v. u. ſetze: zieht davon das gegebene ꝛc. ſtatt: zieht es von dem gegebenen.

= 101 = 6 ſetze $-0,038 = 823,9$ ꝛc. ſtatt $-0,038 - 823,9$ ꝛc.

= 106 = 19 ſetze, alſo für, ſtatt alſo hier.

= 108 = 16 = $\frac{9x^3}{20.10}$ ſtatt $\frac{9x^3}{30.1}$

Seite 109 Zeile 4 ſetze $1 + \frac{9x}{10}$ ſtatt $1 - \frac{9x}{10}$

= 110 = 3 = $+ \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}}$ ſtatt $+ \frac{3x^{2}}{8a^{\frac{3}{2}}}$

= 111 = 8 = $\frac{3.7x^2}{2.4^2.\sqrt[4]{a''}}$ ſtatt $\frac{3x^2}{2.4^2.\sqrt[4]{a''}}$

= 113 = 6 = $\frac{x^2(1-x)^2}{3^2.a^{\frac{5}{3}}}$ ſtatt $\frac{x^2(1-x)^2}{3^2.a^5}$

= = = 2 v. u. ſetze — ſtatt =.

= 122 = 12 ſetze: der Gebrauch dieſer Formel iſt ꝛc.
ſtatt: = = = Reihe iſt ꝛc.

= 126 = 15 ſetze — 12 m ſtatt 12 m.

= 128 = 1 = b = 6 ſtatt b = h.

= 133 = 17 ſetze $\frac{(3^8 - 1) + 8.3^8}{2}$

ſtatt $\frac{(3^8 - 1)}{2} + 8.3^8$

= 135 = 5 v. u. ſetze $- dnq^2$ ſtatt $+ dnq^2$.

= = = 4 = = = $- dnq$ = $+ dnq$.

= = = 3 = = = daſſelbe.

= 136 = 9 ſetze im Nenner: $(9-1)^2 b$ ſtatt $(9-1) b$

= 138 = 7 v. u. ſetze würde, ſtatt wurde.

= 140 = 13 ſetze $\frac{2}{100}$ ſtatt $\frac{2}{200}$

= 141 = 8 = S' ſtatt S.

= = = 11 = S — S' ſtatt S — S.

= = = 13 = T = ſtatt S =.

= 142 = 4 v. u. ſetze — C ſtatt — c.

= = = 2 = = = $- ACn^2$ ſtatt $- AC^2$.

= 144 = 14 ſetze $\frac{8}{12}$ und $\frac{4}{12}$ ſtatt $\frac{7}{12}$ und $\frac{5}{12}$

145 = 14 = S = ſtatt — S =.

Seite 146 Zeile 13, $+ \ldots\ldots$ gilt nichts.
⸗ 147 ⸗ 2 v. u. ſetze $+ \ldots\ldots = 1$.
⸗ 152 ⸗ 15 ſetze $11\frac{21}{384}$ ſtatt $11\frac{91}{334}$.
⸗ ⸗ ⸗ 19 ⸗ $108.7 + 52.49$ ſtatt $208.7.52,49$
⸗ 153 ⸗ 6 v. u. ſetze 15^5 ſtatt 20^5.
⸗ 157 ⸗ 2 ſetze $6 - \frac{1}{2}$ ſtatt $b - \frac{1}{2}$.
⸗ 158 ⸗ 14 ⸗ $-3\Delta^{2}z - 3\Delta z$
ſtatt $-3\Delta^{2}z - 3\Delta^{2}z$.
⸗ 171 ⸗ 10 fällt n^{m-7} weg.
⸗ ⸗ ⸗ 21 ſetze 1^9 ſtatt 1^5.
⸗ 173 ⸗ 8 heißt es $\frac{1}{5}n(2n^2 + 3n + 1)$.
⸗ 179 ⸗ 8 v. u. ſetze übrige, ſtatt obige.
⸗ 187 ⸗ 10 ſetze die Zeichen, ſtatt das.
⸗ ⸗ ⸗ 15 ſetze $\sqrt{5}$, zwei Mal ſtatt $\sqrt{-5}$.
⸗ 188 ⸗ 19 „erhaltenen Faktoren“ kein, dazwiſchen.
⸗ 190 ⸗ 4 ſetze $\sqrt{5}$, ſtatt $\sqrt{-5}$.
⸗ 192 ⸗ 13 ſetze $31x + 394$ ſtatt $31x\ 394$.
⸗ 200 ⸗ 4 v. u. ſetze 8 ſtatt 3.
⸗ 204 ⸗ 1 ſetze $m = 3, \frac{a}{m} = 9$.
⸗ ⸗ ⸗ 2 ſetze $y - 9$ ſtatt $x - 9$.
⸗ ⸗ ⸗ 19 ⸗ $m = 2, \frac{a}{m} = -18$.
⸗ 205 ⸗ 10 ⸗ $m = 2, 11, \frac{a}{m} = \frac{31}{26}$
⸗ ⸗ ⸗ 6 v. u. im Nenner $13.13.2.2$
ſtatt $13.13.2.3$.
⸗ 208 ⸗ 8 ſetze $a\left[\frac{y}{n}\right]^{m-1}$ ſtatt $a\left[\frac{y}{n}\right.^{m-1}$
⸗ 212 ⸗ letzte, ſetze D ſtatt C.
⸗ 213 ⸗ erſte, daſſelbe.
⸗ ⸗ ⸗ 2 ſetze C ſtatt D.
⸗ 214 ⸗ 6 v. u. $2x^2$ ſtatt $2x^9$.

Seite 222 Zeile letzte $\frac{2+4}{3}$ ſtatt $\frac{242}{3}$

= 223 = 6 v. u. ſetze $3n^2$ ſtatt $n3^2$.

= 225 = 7 ſetze $3\frac{1}{2}$ ſtatt $3\frac{1}{4}$.

= 230 = 10 v. u. ſetze $\sqrt{}49 = 7$ anſtatt $\sqrt{49 = 7}$

= 236 = 2 ſetze $\sqrt[3]{}8 - 5$ ſtatt $\sqrt[8]{8 - 5}$

= 240 = 6 v. u. ſetze $3yz^2$ ſtatt yz^2.

= 244 = 13 ſetze $+ 4bd$ ſtatt $- 4bd$.

= = = 6 v. u. ſetze C ſtatt B.

250 = 1 in der zweiten Gleichung ſetze $- qx - r$ ſtatt $qx - r$.

= = = in derſelben 2ten Zeile $x^2 + 12$ ſtatt $x^2 +$

= 262 = 5 v. u. im Zähler ſetze 572 ſtatt 0,572.

= = = 3 = = = = 0,00085911 ꝛc. ſtatt 0,000859011 ꝛc.

Fünfter Band.

Seite 1 §. 1 Zeile 1 ſteht ſtätige Größen, ſoll ſtehen ſtetige ꝛc.

= 8 §. 8 = 4 v. u. ſteht im Centrum, ſoll ſtehen Centro.

= 10 §. 10 Zeile 10 v. u. ſteht ∟ ACA, ſoll ſtehen ∟ ACB.

= 17 §. 18 = letzte ſteht BC ! AC, ſoll ſtehen BC ! AE

= 22 §. 22 = 6 ſteht CE = DF ſoll ſtehen CF = DF

= = §. 23 = 10 v. u. ſteht E ! = = E ! AB.

= 42 §. 41 = 1 im §. ſteht: Wenn eine Gerade FR, ſoll ſtehen TR.

= 45 Anmerk. Zeile 2 ſteht D zu CB, ſoll ſtehen D zu EB

= 46 Zeile 4 v. u. ſteht Fig. 47 ſtatt §. 47.

= 55 = 16 ſteht Erklärung §. 47. ſoll ſtehen §. 49.4.

Seite 56 §. 56 Zeile 5 v. u. ſteht $ac = AC$, ſoll ſtehen $ac \# AC$.

= 67 §. 69 = 4 = = $(a+t)\frac{n}{9}$ ſoll heißen $(a+t)\frac{n}{2}$.

= 75 zu §. 79 gehört Fig. 74.

= 77 Zeile 11 ſteht $\llcorner y = \llcorner y$, heißt $\llcorner y = \llcorner u$.

= 81 §. 85. Conſtr. ſteht: Man errichte den Seiten, heißt, auf den Seiten.

= = Am Schluſſe dieſes Satzes ſteht BF und LF, ſoll ſtehen BF, LF und AH.

= 93 letzte Zeile ſteht AB : AE, heißt AB . AE.

= 95 Zeile 17 ſteht Punkten, heißt Punkte.

= = = 3 v. u. ſoll am Rande ſtehen B.

= 96 = 7 ſteht $\sqrt{\left(\frac{10a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}\right)}$ ſoll ſtehen $\sqrt{\frac{10a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\sqrt{5}}$

= = = 8 = $\sqrt{\frac{a^2}{4}(5-\sqrt{5})}$ ſoll ſtehen $\sqrt{\frac{a^2}{2}(5-\sqrt{5})}$

= 101 Zeile 13 ſteht $45^\circ . 15^\circ$, heißt 45°.

= 106 = 2 v. u., im Nenner $\sqrt{4-3}$ ſtatt $4-3$.

= = = 3 = = = = $4-3$ ſtatt $\sqrt{4-3}$.

= 108 = 4 heißt x^2 ſtatt x2.

= = = 5 v. u. heißt es, $DC = x$ iſt;

= 111 = 1 ſetze MP ſtatt MG.

= 112 = 3 v. u. heißt es OGHIKLM ſtatt COGHIKLM.

= = = letzte, ſoll ſtehen OX ſtatt ox.

= 113 = = = = X^2 ſtatt X2.

Seite 122 Zeile 3 v. u. ſoll ſtehen: CF = der zweiten,
ſtatt, CF = der dritten.

= 124 §. 117 Zeile 3 ſoll heißen: die Linien, ſtatt, die Linie.

= 125 Zeile 13 heißt es: EG : EA = EF : E6
ſtatt, CG : EA = EF : E6.

= 130 = 1 = = DE ſtatt = DF.

= = = 9 heißt a b ſtatt ab.

= 138 = 7 = $\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)$ ſt. $\left(\frac{a^2+b^2\ c^2}{2b}\right)$

= 139 = 10 = $y = \frac{1}{2b}$ ſtatt $\frac{1}{}\ 2b$.

= 146 = 5 heißt es mr = ſtatt mn =.

= = = 9 = = $\frac{oo\,ab}{oo^2}$ ſtatt $\frac{o9\,ab}{oo^2}$

= 155 = 18 u. 19 heißt es $AB \,.\, \frac{AC}{2}$ ſtatt $AB\ \frac{AC}{2}$.

= 159 = 7 h. noch ſt. nicht.

= = = 2 v. u. $\frac{x^3}{2.a.oo^3}$ ſtatt $\frac{x3}{2.a.oo^3}$

= 161 = 8 das letzte Zeichen am Schluſſe der Zeile
iſt + nicht —

= 181 = 5 v. u. heißt 1° 2′ 5″ ſtatt 1° 1′ 5″

= 190 = 13 heißt d = 31,8′ ſtatt = 31,8′

= 193 = 4 v. u. ſoll ſtehen 88 D d″ ſtatt 88 D d′

= 208 §. 161 Zeile 6 ſoll heißen: es ſoll eine Figur ꝛc.
ſtatt: es ſoll ein Quadrat ꝛc.

= = = = = 10 ſtatt ∟ ABC ſetze BAC.

= 215 Zeile 4 v. u. ſetze AB = z ſtatt AB = Z.

= 222 = 14 heißt $x = b\sqrt{\frac{1}{6}}$ ſtatt $x = b\sqrt{\frac{2}{6}}$.

= 223 = 2 heißt es im Nenner $2\sqrt{2}$ ſtatt $2\sqrt{}^{2}$

= = = 3 = $\frac{-2S}{-4}$ ſtatt $\frac{-2S}{}$

Seite 224 Zeile 7 v. u. w $\frac{2S}{z}$ ſtatt $w = {}^{2S}_{z}$

= = = 4 = = heißt es $\frac{2S}{z}$ ſtatt $\frac{2S}{2}$

= 225 = 5 = = $\left(\frac{p^2+4S}{4p}\right)$ ſtatt $\left(\frac{p^2+4S}{4p}\right.$

= 226 = 2 im Nenner $\pm\sqrt{}$ ſtatt $+\sqrt{}$.

= 236 zu XXXI gehört Fig. 143.

= 238 = XXXIV Zeile 7 heißt $\frac{1}{3}$ ABCDE ſtatt $\frac{1}{3}$ ABCD.

= 239 Zeile 3 v. u. heißt: wegen = Höhe, ſtatt, wegen = Grundlinie und Höhe.

Nachtrag
zu den Druckfehlern der vier erſten Bände.

Dritter Band.

Seite 126 Zeile 13 heißt es + R ſtatt + Q.
= = = 14 = = + 2R = + 2Q.
= = = 15 = = 2R = 2Q.
= = = 16 = = R = Q.
= 162 = 4 v. u. heißt es tq — ſtatt tq =.

Vierter Band.

Seite 109 Zeile 2 ſetze + x ſtatt — x.
= 101 = 17 ſetze Rechenbücher, ſtatt Rechnenbücher.
= 126 = 4 = daß b = 3, anſtatt da b = 3.

Carton

für Seite 199 und 200.

Seite 199 bleibt alles wie es iſt, nur die letzte Zeile heißt:

Da nun auch $AB : ab = BC : bc$,

Seite 200 bleibt alles, bis Zeile 13, hier heißt es: aus B und E iſt $DE^2 : de^2 = AB^2 : ab^2$ (P

Zeile 14, 15, 16 bleiben, und nun wie folgt.

Hinter

„und ſomit auch IV. erwieſen" kömmt nur

Aus F und K wird nun unmittlbar

$ABCDE : abcde = EA^2 : ea^2$

woburch nun auch V. erwieſen iſt.

(ſtatt Zeile 17, 18, 19, 20 21 und 22.)

§. 157. Fig. 98.

ꝛc. ꝛc.

Verbeſſerungen
zu
dem fünften Bande.

Seite 161 letzte Zeile lies: $= \frac{ax}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a}$ u. ſ. w.,

ſtatt: $= \frac{ax}{2} = \frac{x^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a}$ u. ſ. w.

Seite 199 letzte Zeile lies: Da nun auch AB : ab = BC : bc,

ſtatt: Ab : ab = BC : bc.

S. 200. Z. 13. lies: aus B und C iſt $DE^2 : de^2 = AB^2 : ab^2$ (P

ſtatt: aus D und E, $DE^2 : de^2 = AB^2 : ab^2$ (P

S. 200 Z. 17 u. f. lies: Aus F und K wird nun unmittelbar

$\underbrace{ABCDE : abcde = EA^2 : ea^2}$

wodurch nun auch V. erwieſen iſt,

und dagegen iſt Zeile 17 — 22 zu ſtreichen.

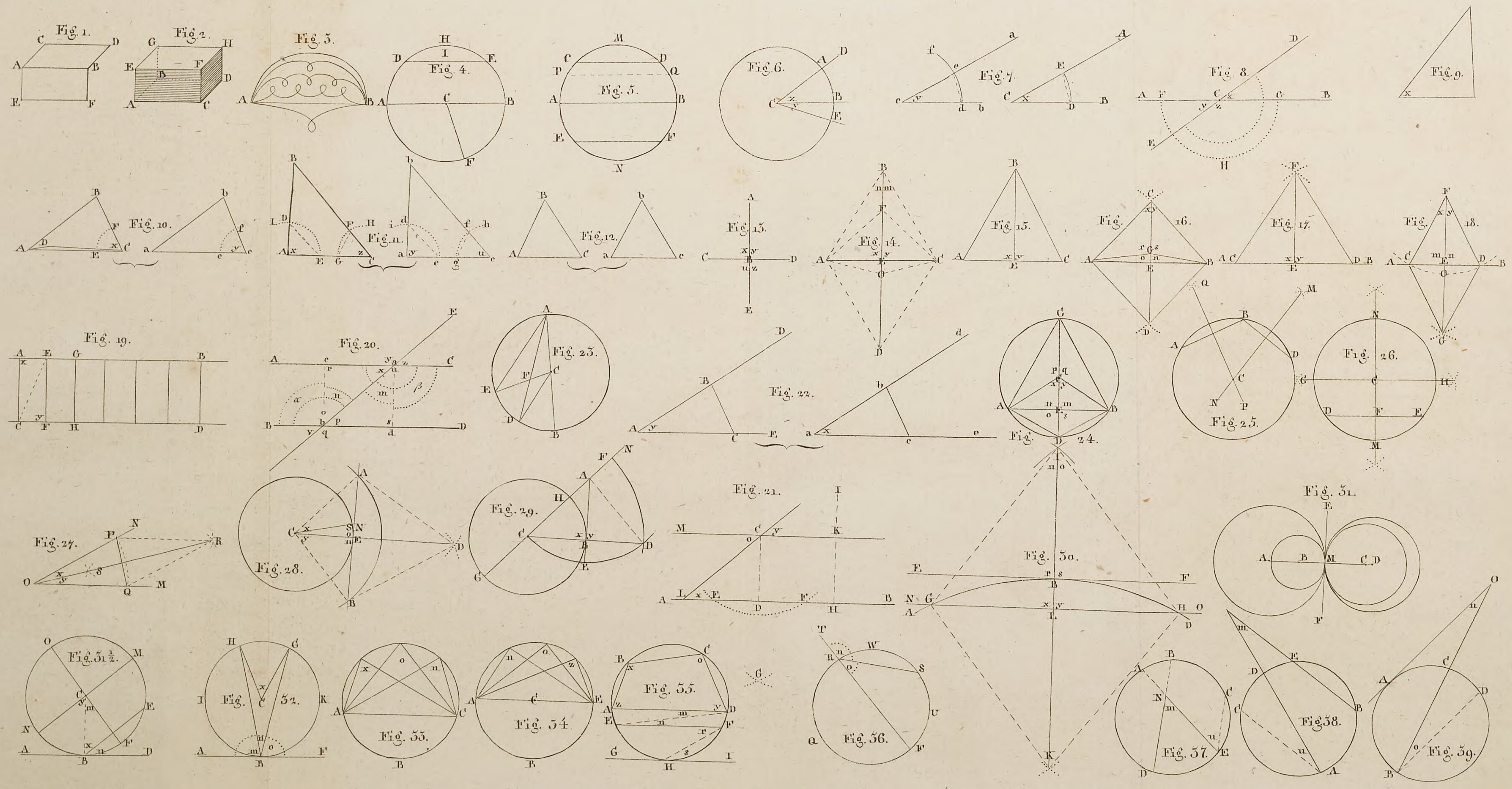


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 31½.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.

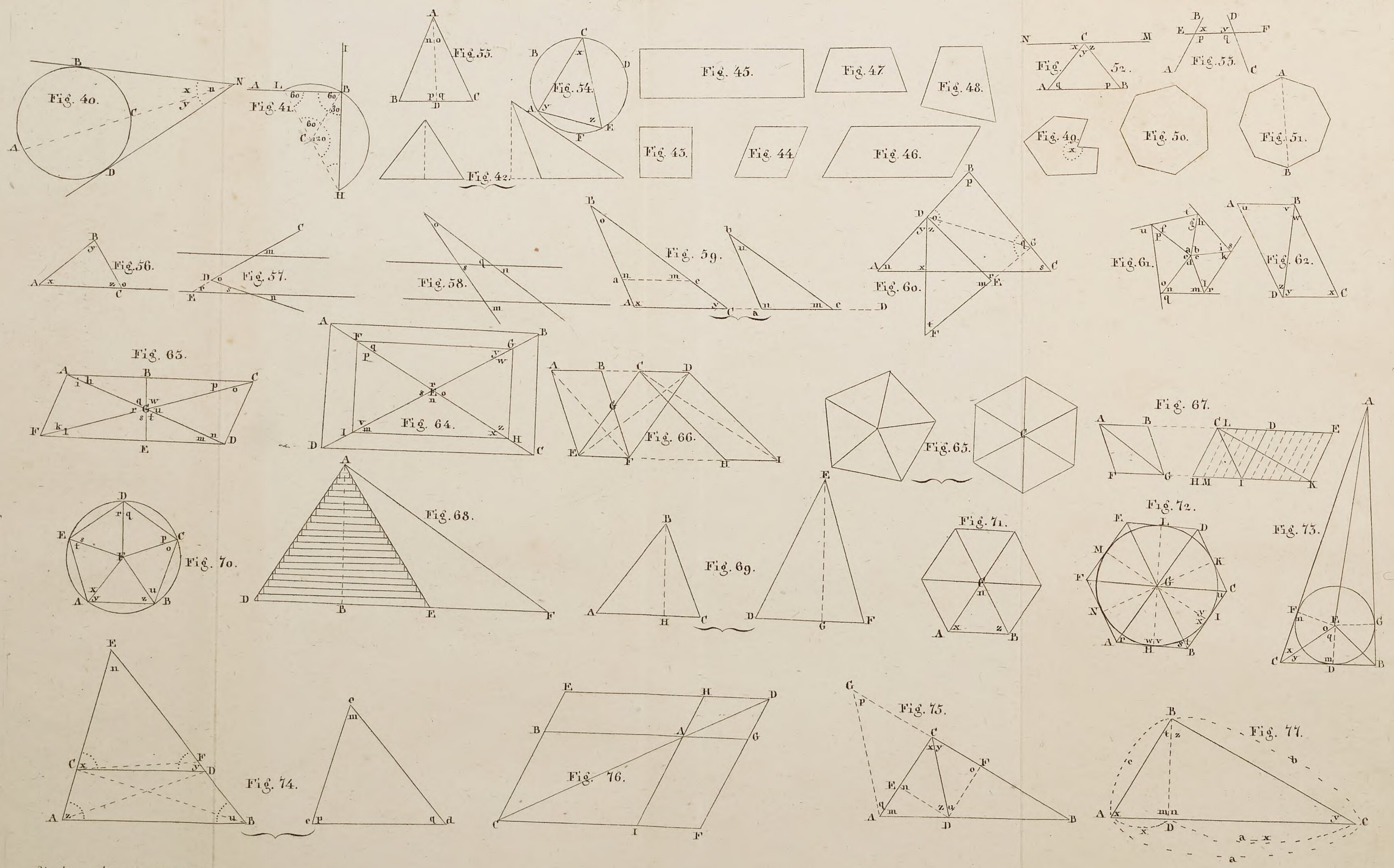
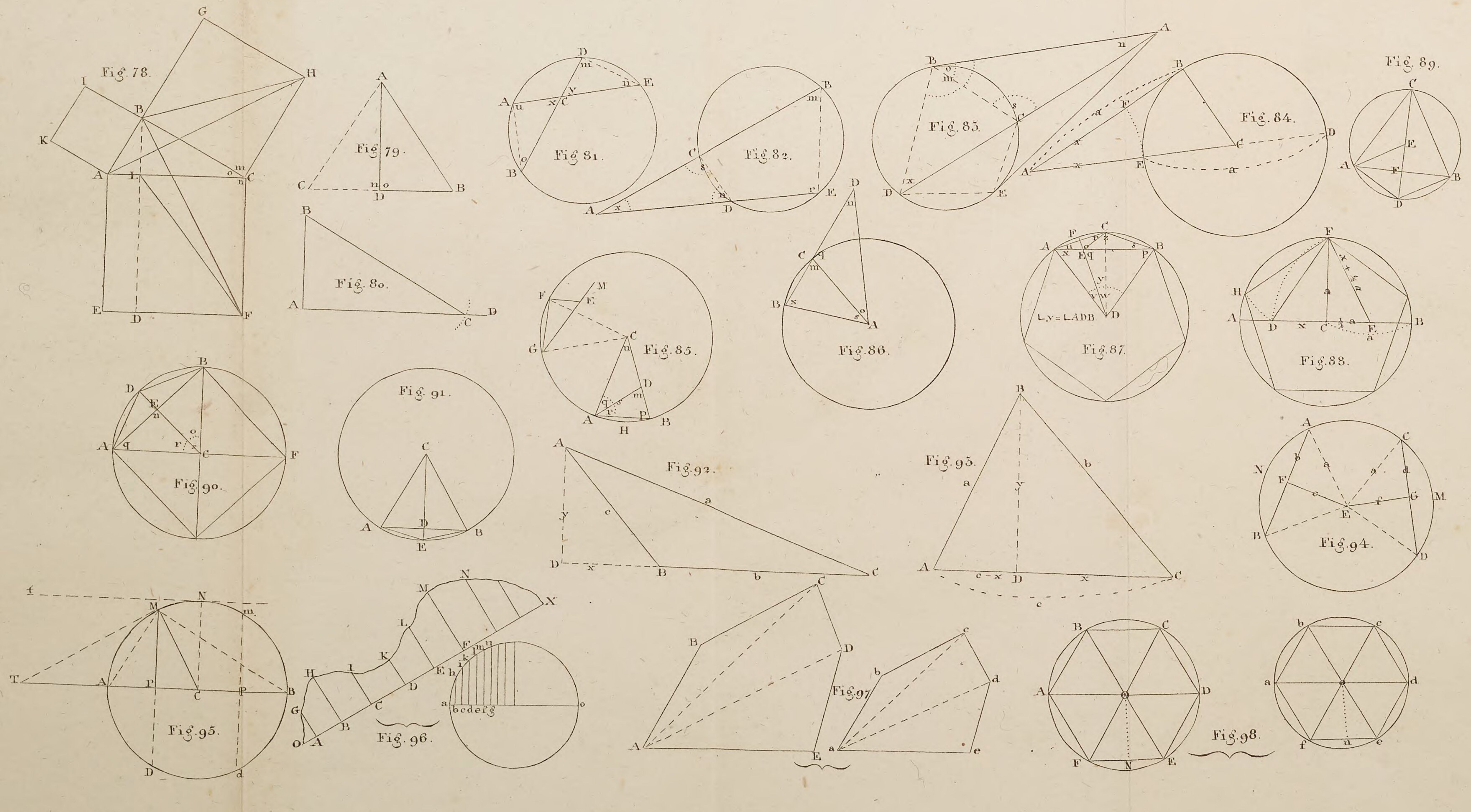


Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 53.
Fig. 42.
Fig. 54.
Fig. 45.
Fig. 47
Fig. 48.
Fig. 43.
Fig. 44
Fig. 46.
Fig. 52.
Fig. 55.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 66.
Fig. 65.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 76.
Fig. 75.
Fig. 77.



Streit's reine Mathematik. V Band.

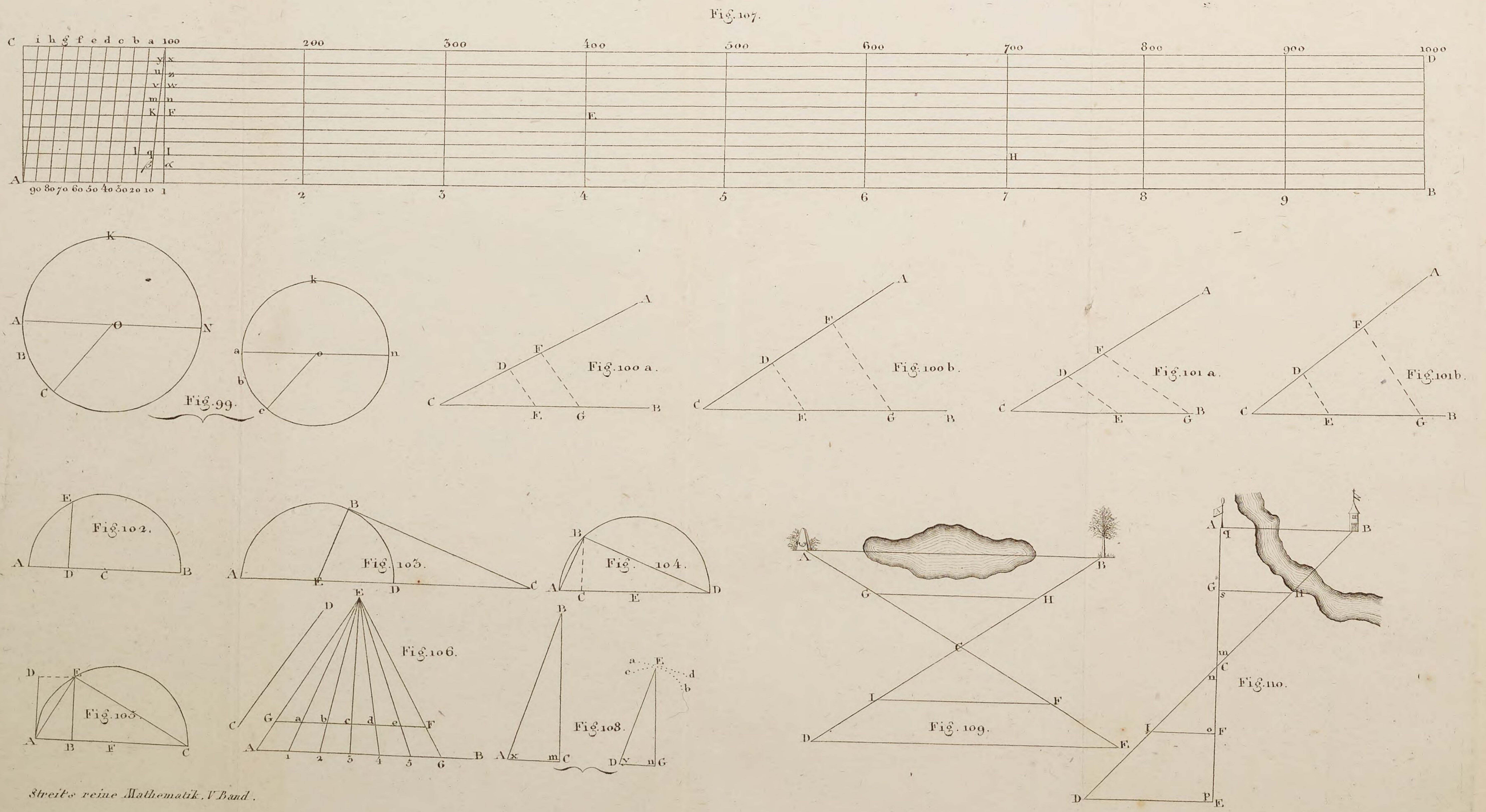
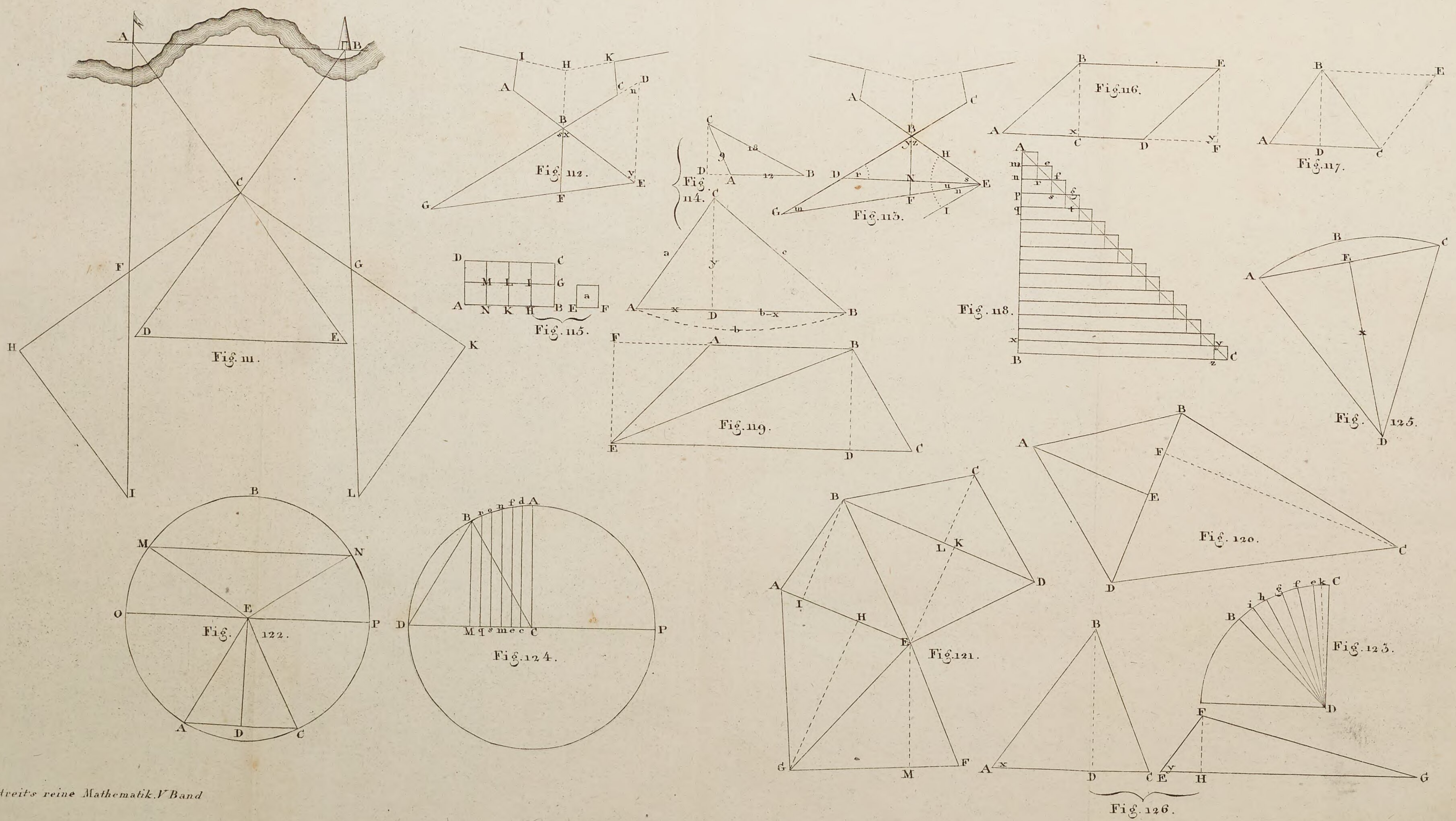


Fig. 107.
Fig. 99.
Fig. 100 a.
Fig. 100 b.
Fig. 101 a.
Fig. 101 b.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.



Streit's reine Mathematik. V. Band

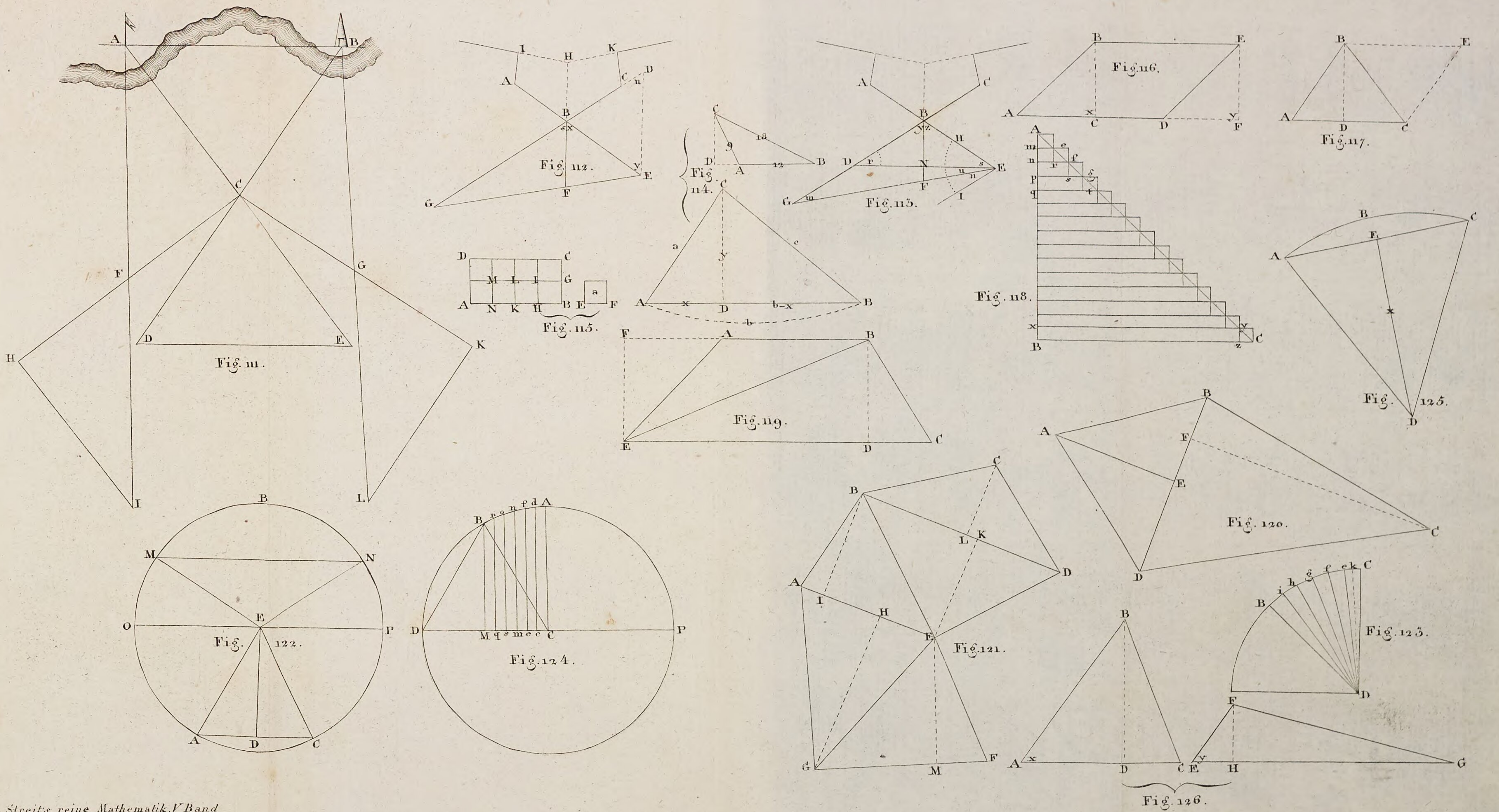


Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.

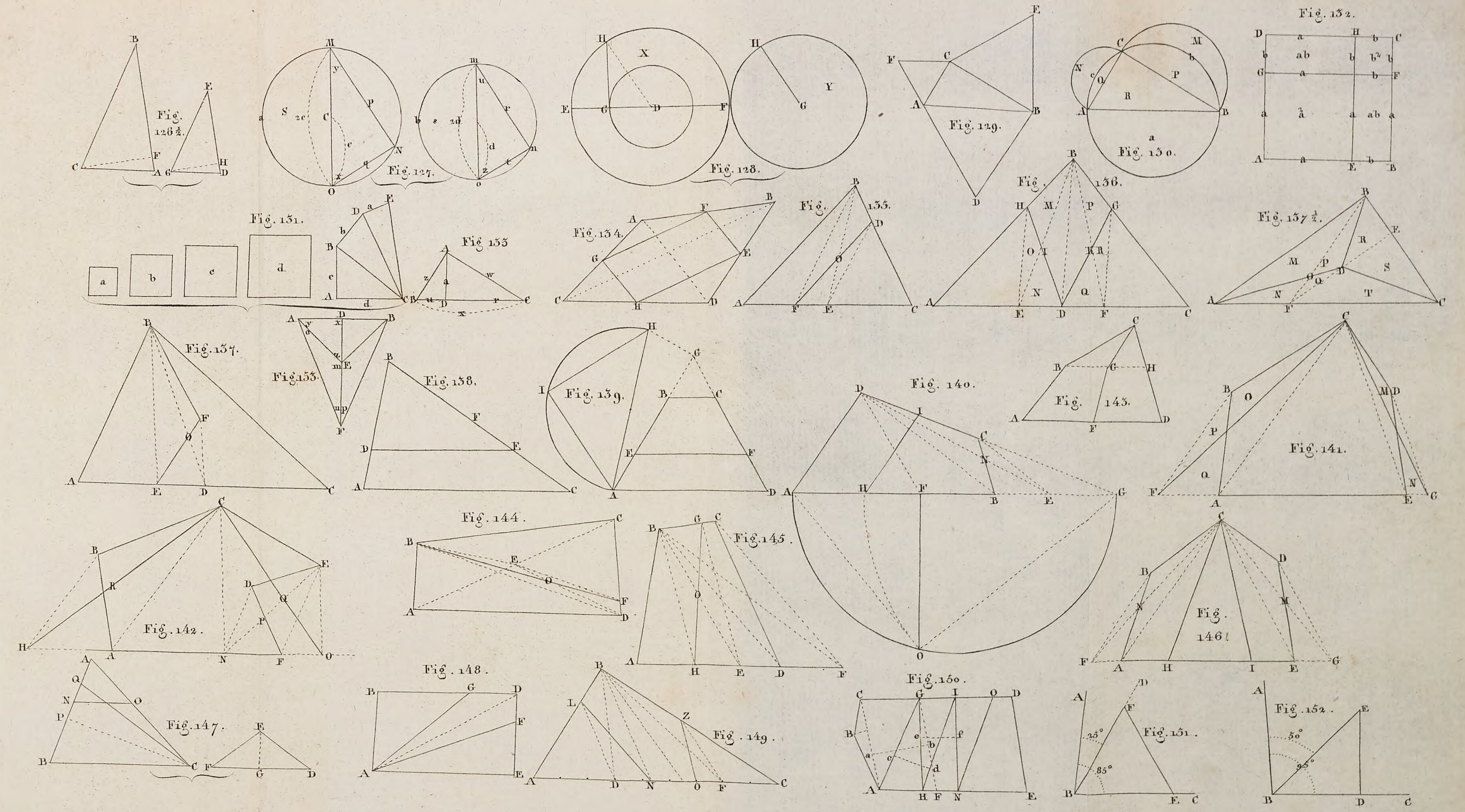


Fig. 126½.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 132.
Fig. 131.
Fig 133
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137½.
Fig. 137.
Fig. 133.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 143.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.

Streit, Friedrich Wilhelm,

Lehrbuch der reinen Mathematik

Bd.: 5

Weimar 1819

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.54-a(5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739765-0